

**Das Quantenmechanische
Dreikörperproblem mit Anwendung auf
den Kern Kohlenstoff-12**

von
Horst Leitz
aus
Fürth

1973

Das Quantenmechanische Dreikörperproblem mit Anwendung auf den Kern Kohlenstoff-12

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Horst Letz
aus
Fürth

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung:	28. November 1973
Dekan:	Prof. Dr. J. Christiansen
Erstberichterstatter :	Prof. Dr. H. Volz
Zweitberichterstatter:	Prof. Dr. M. G. Huber



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINLEITUNG

Die quantitative Erklärung der stationären Zustände eines Atomkerns erfordert bei genauer Kenntnis der spezifischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung V_{ij} die Lösung der nicht-relativistischen Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \Delta_j \Psi + \sum_{i < j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, s_i, s_j, t_i, t_j) \Psi = E \Psi$$

(s_i, t_i : Spin bzw. Isospin des i -ten Nukleons)

des N - Nukleonensystems. Da für große Teilchenzahlen N eine geschlossene Lösung nicht möglich scheint, wurden durch geeignete vereinfachende Annahmen Lösungsverfahren entwickelt (z.B. die Schalenmodellnäherung), welche es ermöglichten, die experimentellen Daten vieler Kerne quantitativ oder wenigstens qualitativ theoretisch zu verstehen. Diese Näherungsmethoden versagen aber im allgemeinen bei kleinen Teilchenzahlen, sodaß in diesen Fällen das vorliegende mathematische Problem einer gesonderten Untersuchung bedarf.

Mit den Arbeiten von S.FLÜGGE und Mitarbeitern | 1 | wurde durch systematische Untersuchung einfacher Drei- und Vierteilchensysteme (abstandsabhängiges Potential, kein Spin) diese Fragestellung aufgegriffen und eine Lösungstheorie entwickelt, deren Grundzüge für den Fall von drei Teilchen folgende Beschreibung gestatten:

- 1) Die Translationsinvarianz des Systems erlaubt nach Einführung geeigneter Koordinaten die Abseparation der Schwerpunktbewegung.
- 2) Den 6 Freiheitsgraden der Relativbewegung werden spezielle verallgemeinerte Koordinaten im Konfigurationsraum zugeordnet.

Dies sind im allgemeinen

- a) 3 innere Koordinaten q_i

zur Festlegung der Gestalt des aus den drei Massen ge -
bildeten Dreiecks und

- b) 3 Eulersche Winkel α_i

zur Beschreibung der Bewegung der Hauptachsen des momen-
tanen Trägheitstensors im raumfesten Schwerpunktsystem.

- 3) Das einfache Verhalten dieser Eulerschen Win-
kel bei Teilchenvertauschung ermöglicht eine
vollständige Symmetrieklassifikation der Wellen-
funktionen.

- 4) Die Schrödingergleichung der stationären Zustän-
de wird unter Berücksichtigung der Drehinvarianz
des Systems durch den Ansatz

$$\Psi(q_i, \alpha_i) = \sum_{N=-L}^{+L} \Phi_N(q_i) D_{MN}^L(\alpha_i)$$

in einen Satz gekoppelter partieller Differen-
tialgleichungen für die Entwicklungskoeffizien-
ten $\Phi_N(q_i)$ umgewandelt. Analytische Lösungen
sind nicht bekannt.

Von dieser Grundlage ausgehend versuchte W. ZICKENDRAHT
| 2 | bei anderer Wahl der inneren Koordinaten und einer
speziellen Wechselwirkung aus diesen gekoppelten Differen-
tialgleichungen ein vollständiges Orthonormalsystem von
Lösungen zu gewinnen, das bei beliebiger Form der Wechsel-
wirkung als Entwicklungsbasis dienen sollte. Dies gelang,
von den Funktionen zum Drehimpuls $L = 0$ und 1 abgesehen,
nicht allgemein.

In den Arbeiten von H.RUDER | 3 | wurde, abgesehen von einer neuen Definition der inneren Koordinaten, erstmals die Konvention aufgegeben, die Eulerschen Winkel mit Hilfe der Hauptträgheitsachsen zu definieren (Mehrdeutigkeit im Falle der Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks). In ausführlichen Untersuchungen | 4 | wird dieser Schritt zwingend begründet. Als Konsequenz hiervon muß das Problem der Symmetrisierung erneut aufgegriffen werden.

Unabhängig von diesen Untersuchungen nahmen A.J.DRAGT | 5 | und in der Folge verschiedene andere Autoren | 6 | unter Einbeziehung gruppentheoretischer Methoden (Prinzip der Democracy) für Systeme mit harmonischer Wechselwirkung die Konstruktion einer Entwicklungsbasis in Angriff, ohne jedoch das Ziel einer vollständigen Lösung zu erreichen.

Von ganz anderer Art ist dagegen das Lösungsverfahren, das mit dem Begriff der Hypersphärischen Funktion verknüpft ist | 7 | . In Analogie zum Zweikörperproblem werden

1) eine "radiale" Variable R

und

2) fünf "Winkel" ϕ_i

eingeführt. Die Winkelvariablen ϕ_i sind die Argumente eines auf der Einheitskugel im sechsdimensionalen Raum definierten Funktionensatzes (hypersphärische Funktionen $K_v(\phi_i)$). Spezielle Funktionen dieser Art hat J.ENGLEFIELD | 8 | angegeben, welche aber nur in einfachen Fällen bezüglich der kartesischen Koordinaten symmetrisiert waren. Der Lösungsansatz

$$\psi(R, \varphi_i) = \sum_{v=0}^{\infty} f_v(R) K_v(\varphi_i)$$

liefert ein unendliches, gekoppeltes, gewöhnliches Differentialgleichungssystem, dessen Lösung bis jetzt ebenfalls nur näherungsweise erfolgte.

Nach diesem Überblick über die bekannten theoretischen Untersuchungen können nun die Fragestellungen der vorliegenden Arbeit präzise formuliert werden.

Es wird versucht

- A) das Problem der Konstruktion von hypersphärischen Funktionen zu lösen (ohne Bezug auf einen speziellen Satz krummliniger Koordinaten im Konfigurationsraum) unter Berücksichtigung aller Invarianzen des Hamiltonoperators (Drehinvarianz , Parität , Teilchenvertauschung) ;
- B) das gekoppelte unendliche Differentialgleichungssystem einer analytischen bzw. einfachen numerischen Behandlung zugänglich zu machen und
- C) ein konkretes Beispiel mit Anwendung auf Fragen der Kernphysik durchzurechnen.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Teil A

HAMILTONOPERATOR, KOORDINATEN UND HYPERSPHÄRISCHE BASISFUNKTIONEN

- I Hamiltonoperator und Koordinaten
- II Teilchenvertauschung
- III Symmetrieklassifikation der homogenen Polynome
- IV Hypersphärische Funktionen
- V Drehimpulsklassifikation
- VI Spin und Isospinfunktion

Teil B

EINFÜHRUNG VON INNEREN KOORDINATEN UND EULERSCHEN WINKELN

- I Innere Koordinaten
- II Eulersche Winkel
- III Der Laplace-Operator
- IV Hypersphärische Funktionen zu $L = 0^+$
- V Hypersphärische Funktionen zu $L \neq 0$

Teil C

DAS DREIKÖRPERPROBLEM MIT WECHSELWIRKUNG

- I Lösungstheorie
- II Eigenwerte und Eigenfunktionen

Teil D

ANWENDUNG AUF KOHLENSTOFF - 12

- I Das α -Teilchenmodell

- II Das niederenergetische Spektrum von ^{12}C
- III Die Wellenfunktionen der stationären Zustände
- IV Der Kernradius

T E I L A

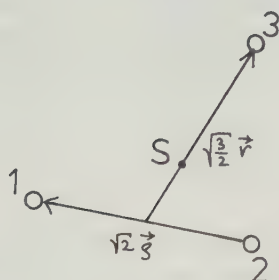
HAMILTONOPERATOR , KOORDINATEN UND HYPERSPHÄRISCHE
BASISFUNKTIONEN

I HAMILTONOPERATOR UND KOORDINATEN

Der Hamiltonoperator eines Systems aus drei gleichen Teilchen, deren Wechselwirkung allein durch ein abstandsabhängiges Potential beschrieben werden kann, hat in einem beliebigen cartesischen Koordinatensystem die Form

$$H = - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^3 \Delta_j + \sum_{i < j=1}^3 v_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Da H mit dem Operator des Gesamtimpulses $\vec{P}$ vertauscht, kann durch Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten die Bewegung des Massenmittelpunktes absepariert werden.



$$\sqrt{2} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \vec{r} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \vec{r}_3$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$$

Abb. 1 :

Die Relativkoordinaten $\vec{r}$ und $\vec{r}$ im Dreikörperproblem entsprechen, von Faktoren abgesehen, den bekannten Jacobi-Vektoren.

Die mit der Transformationsgleichung

$$a = U \circ b$$

$$a = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{2} & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ -\frac{1}{2} \sqrt{2} & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \vec{s} \\ \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix}$$

vorgenommene Umrechnung des Hamiltonoperators führt für die Relativbewegung auf

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^{(6)} + \sum_{i < j=1}^3 V_{ij}(\vec{s}, \vec{r})$$

Hierbei wurden die kinetischen Anteile der beiden reduzierten Massen im 6 - dimensionalen Laplace-Operator zusammengefaßt:

$$\Delta^{(6)} = \Delta_{\vec{s}} + \Delta_{\vec{r}} = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial r_3^2}$$

Das Eigenwertproblem

$$H_0 \Psi = E_0 \Psi$$

ist unter Berücksichtigung der Invarianzen von H_0 zu lösen. Die zu ermittelnde Wellenfunktion muß wegen

$$[H_0, \vec{L}] = 0$$

($\vec{L}$: Drehimpuls bezogen auf den Schwerpunkt S)

$$[H_0, \pi] = 0$$

(π : Parität im Schwerpunktsystem)

gleichzeitig Eigenfunktion von

$$L^2, L_z, \pi$$

sein. Wenn wir weiterhin innere Eigenschaften der Teilchen (wie zum Beispiel Spin und Isospin) berücksichtigen, so muß sie zusätzlich nach den irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_3 dreier Elemente klassifiziert sein. (Das Anwendungsbeispiel bezieht sich auf den Fall Spin $S = 0$ und Isospin $I = 0$).

Wie der Ortsteil der Wellenfunktion im Falle eines Nukleonensystems (halbzahliger Spin und Isospin) durch die Spin-Isospinfunktion zu ergänzen ist, deuten wir kurz in Kapitel A/VI an.

Es sei nun noch darauf hingewiesen, daß die im Verlauf dieser Arbeit konstruierten hypersphärischen Basisfunktionen auch zur Beschreibung von Systemen aus drei unterscheidbaren Teilchen verwendet werden können, wenn man die reduzierten Massen

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

bei der Definition der Relativkoordinaten berücksichtigt. Setzen wir

$$\sqrt{\frac{m}{u_1}} \vec{s} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \sqrt{\frac{m}{u_2}} \vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \vec{r}_3$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3\bar{m}} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3)$$

mit der mittleren Masse $\bar{m} = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, so unterscheidet sich die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = - \frac{\hbar^2}{2\bar{m}} \Delta^{(6)}$$

von der des Systems aus drei gleichen Teilchen nur durch den die Masse enthaltenden Faktor.

II TEILCHENVERTAUSCHUNG

Die für gleiche Teilchen nötige Symmetrisierung von Wellenfunktionen kann im Schwerpunktsystem für das N - Körperproblem in einfacher Weise noch nicht vorgenommen werden. Im Sonderfall $N = 3$ wird deshalb in diesem Kapitel ein spezielles Verfahren entwickelt, dessen gruppentheoretische Begründung und Erweiterung auf das 4 - Teilchensystem Thema der Diplomarbeit von G.WUNNER | 9 | ist.

Die Einführung des Schwerpunktsystems bewirkt, daß das überschaubare Verhalten der kartesischen Koordinaten bei Teilchenvertauschung durch eine kompliziertere Transformation der Relativkoordinaten $\vec{s}$ und $\vec{r}$ ersetzt wird. Der Schwerpunkt selbst ist auf Grund seiner Definition selbstverständlich invariant. Um das Transformationsverhalten der Relativkoordinaten erläutern zu können, betrachten wir zwei Anordnungen der Teilchen, welche durch Permutation auseinander hervorgehen.

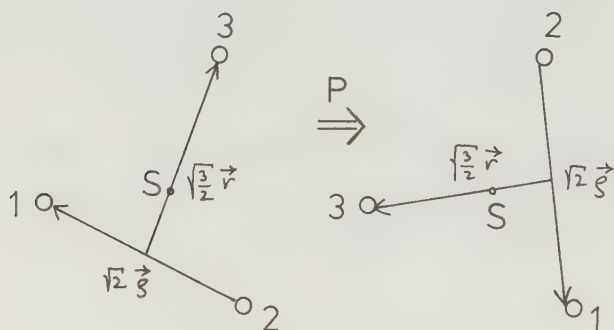


Abb. 2 :

Relativkoordinaten $\vec{s}$ und $\vec{r}$ im System (1|2|3) und in der permutierten Anordnung (3|1|2).

Koordinaten, die sich auf eine permutierte Anordnung beziehen, kennzeichnen wir mit dem Index p .

Wenn P irgendeine der 6 Permutationsmatrizen der dreidimensionalen Darstellung der Gruppe S_3 ist, so gilt für die Spalte a der Ortsvektoren $\vec{r}_j$ ($j = 1, 2, 3$):

$$a_p = P \circ a$$

(a_p ist die Spalte der unnummerierten Ortsvektoren $\vec{r}_j$).

Zu beiden Anordnungen gehören Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$b = \begin{pmatrix} \vec{s} \\ \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad b_p = \begin{pmatrix} \vec{s}_p \\ \vec{r}_p \\ \vec{R} \end{pmatrix}$$

die sich aus den Koordinaten a bzw. a_p berechnen lassen:

$$a = U \circ b$$

$$a_p = U \circ b_p$$

Als Darstellung der Permutationsmatrizen P im Schwerpunktsystem erhalten wir hiermit

$$b_p = (U^{-1} \circ P \circ U) \circ b = P_s \circ b$$

d.h.:

$$P_s = U^{-1} \circ P \circ U$$

Die explizite Berechnung von P_s ergibt für einfache Vertauschungen (Transpositionen)

$$P_S = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline y & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

und bei doppelten Vertauschungen

$$P_S = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline y & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

Die Relativkoordinaten werden demnach in diesen beiden Fällen für die permutierte Anordnung durch die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} \vec{\varrho}_p \\ \vec{r}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varrho} \\ -\vec{r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \vec{\varrho}_p \\ \vec{r}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varrho} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

festgelegt.

Nun ist aus der Funktionentheorie [10] die elementare Tatsache bekannt, daß die Elemente des Körpers der komplexen Zahlen eineindeutig durch Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow z = a + ib \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow z^* = a - ib$$

deren Determinante den Wert +1 hat, dargestellt werden können. Solche Matrizen finden wir aber gerade in den Transformationsgleichungen der Relativkoordinaten. Wir haben so-

mit die Möglichkeit durch Einführung komplexer Koordinaten einfachere Beziehungen zu erhalten.

Definition:

$$\vec{A} = \vec{\xi} + i \vec{r}$$

$$\vec{A}^* = \vec{\xi} - i \vec{r}$$

Ersetzen wir die Spalten

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{A} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ -\vec{r} \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{A}^*$$

durch $\vec{A}$ bzw. $\vec{A}^*$, so können die Transformationsgleichungen der Relativkoordinaten in der Form

$\vec{A}_p = z \vec{A}^*$	$\vec{A}^* = z^* \vec{A}$
---------------------------	---------------------------

mit $z = x + iy$ geschrieben werden.

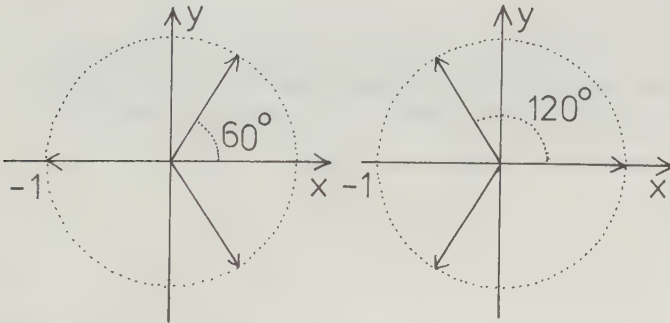


Abb. 3 :

Den 6 Permutationsmatrizen P_s der Gruppe S_3 entsprechen in der komplexen Ebene die sechs Einheitswurzeln. Zu den einfachen Vertauschungen gehören jene mit den Argumenten 60° ,

180° , 300° , während die Einheitswurzeln zu den Argumenten 0° , 120° und 240° den doppelten Vertauschungen zugeordnet sind.

Grundsätzlich ist für alle Phasenfaktoren z die Beziehung

$$a) \quad z z^* = 1$$

gültig.

Für die den einfachen Vertauschungen zugeordneten z - Werte folgt

$$b) \quad z^G = (-1)^G \quad |G| = 0, 3, 6, 9, \dots$$

während die z - Werte der doppelten Vertauschungen die Eigenschaft

$$c) \quad z^G = +1 \quad |G| = 0, 3, 6, 9, \dots$$

besitzen.

Produkte der Variablen A_j und A_j^* können demnach sehr einfach durch Berechnung der zugehörigen Potenzen von z und z^* auf ihre Eigenschaften bei Permutation untersucht werden.

III SYMMETRIEKLASSIFIKATION DER HOMOGENEN POLYNOME

Ein Polynom in den Variablen $A_1, \dots, A_3^*$ (dafür wird abkürzend nur noch A, A^* geschrieben) heißt homogen vom Grade Q , wenn in der Linearkombination

$$P(Q|A, A^*) = \sum_v C_v A_1^{s_1} A_2^{s_2} A_3^{s_3} (A_1^*)^{t_1} (A_2^*)^{t_2} (A_3^*)^{t_3}$$

(v steht stellvertretend für die Summationsindices $s_1, \dots, t_3$)

für jedes Monom die Nebenbedingung

$$Q = s_1 + s_2 + s_3 + t_1 + t_2 + t_3$$

erfüllt ist. Die Gesamtheit dieser Polynome Q -ter Stufe bildet einen Vektorraum $V(Q)$, dessen Dimension der Anzahl linear unabhängiger Monome

$$M_v = A_1^{s_1} A_2^{s_2} A_3^{s_3} (A_1^*)^{t_1} (A_2^*)^{t_2} (A_3^*)^{t_3}$$

entspricht. Diese Zahl erhalten wir aus

$$\dim V(Q) = \sum_{x+y=Q} n(x) n(y)$$

$$(x = s_1 + s_2 + s_3, \quad y = t_1 + t_2 + t_3)$$

mit den Funktionen

$$n(x) = \frac{1}{2} (x+1)(x+2) \quad n(y) = \frac{1}{2} (y+1)(y+2)$$

welche die Möglichkeiten angeben, ganze Zahlen x bzw. y in drei ganzzahlige Summanden zu zerlegen.

Tabelle 1 :

Q	0	1	2	3	4	5
dim V(Q)	1	6	21	56	126	252

An dieser Stelle soll nun eine Eigenschaft einer Teilmenge von Elementen aus $V(Q)$ erwähnt werden, die auch im Zusammenhang mit den im nächsten Kapitel eingeführten homogenen Differentialoperatoren wichtig wird. Durch Multiplikation der Polynome $P(Q-2|A, A^*)$ aus $V(Q-2)$ mit dem speziellen Polynom

$$R^2 = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + A_3 A_3^*$$

kann ein Unterraum $U(Q)$ von Elementen aus $V(Q)$ erzeugt werden. Diese Elemente bezeichnen wir mit

$$P_I(Q|A, A^*) = R^2 P(Q-2|A, A^*)$$

Die übrigen Elemente aus $V(Q)$, wir bezeichnen sie mit $P_{II}(Q|A, A^*)$, gestatten keine derartige Darstellung, da dies im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit sowohl der Elemente Q -ter Stufe wie auch der Monome aus $V(Q-2)$ stünde. Die Dimension des Raumes $W(Q)$ der Elemente $P_{II}(Q|A, A^*)$ ist somit

$$\dim W(Q) = \dim V(Q) - \dim V(Q-2)$$

Tabelle 2 :

Q	0	1	2	3	4	5
dim W(Q)	1	6	20	50	105	196

Es genügt nun, die Symmetrieklassifikation allein für den Unterraum $W(Q)$ vorzunehmen, wenn wir voraussetzen, daß $V(Q-2)$ bereits klassifiziert ist. Die Eigenschaften der Elemente $P_I(Q|A, A^*)$ sind dann wegen der Invarianz von R^2 bei Teilchenvertauschung bereits bekannt. Aus

$$P_{II}(Q|A_p, A_p^*) = z^X (z^*)^Y P_{II}^*(Q|A, A^*)$$

erhalten wir durch Diskussion von z^{X-Y} die gewünschte Klassifikation von $W(Q)$.

a) Symmetrische und antisymmetrische Polynome

Für vorgegebenen Homogenitätsgrad $Q = x + y$ wird durch

$$|x - y| = 3w \quad w = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ein invarianter Unterraum $W(Q|inv)$ definiert. Für jedes Element $P_{II}(Q|A, A^*)$ aus $W(Q|inv)$ gilt

$$P_{II}(Q|A_p, A_p^*) = (-1)^{3w} P_{II}^*(Q|A, A^*)$$

Dadurch wird das Verhalten der Linearkombination

$$P_{\pm}(Q|A, A^*) = P_{II}(Q|A, A^*) \pm P_{II}^*(Q|A, A^*)$$

bei Teilchenvertauschung festgelegt. Wir bekommen wegen

$$P_{\pm}(Q|A_p, A_p^*) = \pm (-1)^{3w} P_{\pm}(Q|A, A^*)$$

für ungeradzahlige Werte von $3w$ als Fermifunktion das Polynom P_+ und als Bosefunktion das Polynom P_- . Für geradzahlige Werte von $3w$ ist dieser Sachverhalt gerade umgekehrt. Wenn $3w$ ungerade ist, können x und y nicht

gleichzeitig gerade oder ungerade sein. Deshalb ist in diesem Fall der Homogenitätsgrad Q selbst ungerade. Ist $3w$ gerade, so auch Q .

Die Dimension des invarianten Unterraums $W(Q|inv)$ errechnet sich aus

$$\dim W(Q|inv) = \sum_{\substack{x+y=Q \\ |x-y|=3w}} n(x) \cdot n(y) - \sum_{\substack{x+y=Q-2 \\ |x-y|=3w}} n(x) \cdot n(y)$$

Tabelle 3 :

Q	0	1	2	3	4	5
$\dim W(Q inv)$	1	0	8	20	27	70

Man beachte, daß für $Q = 1$ keine invarianten Polynome existieren.

Wichtig zu wissen sind nun noch die Dimensionen der Bose- und Fermiunterräume, aus denen sich $W(Q|inv)$ zusammensetzt. Für ungerade Werte von Q ist, wie bereits erwähnt, stets $x \neq y$, sodaß die Möglichkeit $P_+ = 0$ oder $P_- = 0$ grundsätzlich ausgeschlossen ist. Deshalb wird

$$\dim W(Q|Bose) = \dim W(Q|Fermi) = \frac{1}{2} \dim W(Q|inv)$$

Für geradzahlige Werte von Q existiert dagegen für $x = y$ und Übereinstimmung der Tripel (s_1, s_2, s_3) und (t_1, t_2, t_3) die Möglichkeit $P_+ \neq 0$ und $P_- = 0$, d.h.: es gibt mehr Bose- als Fermifunktionen. Die Polynome P_+ haben in diesem Sonderfall die Form

$$P_+(Q|A, A^*) = (A_1 A_1^*)^{s_1} (A_2 A_2^*)^{s_2} (A_3 A_3^*)^{s_3}$$

und ihre Gesamtzahl ist

$$f = x + 1$$

sodaß für die Dimensionen der Unterräume gilt:

$$\dim W(Q|Bose) = \frac{1}{2}(\dim W(Q|inv) + f)$$

$$\dim W(Q|Fermi) = \frac{1}{2}(\dim W(Q|inv) - f)$$

Tabelle 4 :

Q	0	1	2	3	4	5
$\dim W(Q Bose)$	1	-	5	10	15	45
$\dim W(Q Fermi)$	-	-	3	10	12	45

b) Gemischte Symmetrien

Die restlichen Polynome zeigen bei allen Permutationen kein einheitliches Verhalten. Sie gehören zur Klasse der gemischten Symmetrien. Sie können in zwei Gruppen gemäß

$$x + y = Q \qquad |x - y| = 3w + 1$$

und

$$x + y = Q \qquad |x - y| = 3w + 2$$

eingeteilt werden. Polynome der ersten Gruppe transformieren sich nach

$$P_{II}(Q|A_p, A_p^*) = \begin{cases} z & x > y \\ z^* & x < y \end{cases} P_{II}^*(Q|A, A^*)$$

die der zweiten nach

$$P_{II}(Q|A_p, A_p^*) = \begin{cases} z^2 & x > y \\ (z^*)^2 & x < y \end{cases} P_{II}^*(Q|A, A^*)$$

Damit ist die Klassifikation der homogenen Polynome abgeschlossen.

IV HYPERSPHÄRISCHE FUNKTIONEN

Definition

Ein homogenes Polynom $P(Q|A, A^*)$ heißt hypersphärische Funktion, wenn es Lösung der sechsdimensionalen Laplace-Gleichung ist:

$$\Delta^{(6)} P(Q|A, A^*) = 0$$

Der ursprüngliche Laplace-Operator hat dabei in den verwendeten komplexen Koordinaten die Form

$$\Delta^{(6)} = 4 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial A_j \partial A_j^*}$$

Die gesuchten Lösungen gewinnen wir vollständig durch geeignete Linearkombination der Elemente des Unterraums $W(Q)$ der Polynome $P_{II}(Q|A, A^*)$, da kein Element $P_I(Q|A, A^*)$ aus $U(Q)$ die Laplace-Gleichung lösen kann. Dies sieht man sofort ein, wenn man bedenkt, daß die Multiplikation von $P(Q-2|A, A^*)$ aus $V(Q-2)$ mit R^2 als unbestimmte Integration interpretiert werden kann:

$$P_I(Q|A, A^*) = \sum_{k=1}^3 \int P(Q-2|A, A^*) dA_k dA_k^*$$

Die Anwendung des Laplace-Operators macht dies wieder rückgängig, sodaß wegen $P(Q-2|A, A^*) \neq 0$ grundsätzlich gilt:

$$\Delta^{(6)} \{U(Q)\} \neq 0$$

Hypersphärische Funktionen können, wenn überhaupt, nur im Unterraum $W(Q)$ gefunden werden.

Die angestrebte Umkombination seiner Elemente bewältigen wir konstruktiv mit Hilfe linearer Differentialoperatoren und einer Erzeugenden Funktion.

Definition:

Die Funktion $\mathcal{Y}(A, A^*)$ ist erzeugende Funktion von Polynomen der Art $P_{II}(Q|A, A^*)$, wenn gilt:

$$a) \quad \mathcal{Y}(A, A^*) = \mathcal{Y}(R) \quad R^2 = \sum_{j=1}^3 A_j A_j^*$$

$$b) \quad \Delta^{(6)} \mathcal{Y}(R) = 0$$

Diese Forderungen führen eindeutig auf die Lösung

$$\mathcal{Y}(R) = R^{-4}$$

Wendet man nun auf $\mathcal{Y}(R)$ einen Differentialoperator D an, der mit dem Laplace-Operator vertauscht, so hat man in der Funktion $D \circ \mathcal{Y}(R)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung. Wählt man D speziell aus der Klasse der linearen, homogenen Operatoren der Form

$$D(Q|\partial, \partial^*) = \sum_V c_V \partial_1^{s_1} \circ \dots \circ (\partial_3^*)^{t_3}$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial A_j} \quad \partial_j^* = \frac{\partial}{\partial A_j^*}$$

so ist das Polynom

$$P_{II}(Q|A, A^*) = R^{2Q+4} D(Q|\partial, \partial^*) \circ \mathcal{Y}(R)$$

eine für $R = 0$ reguläre hypersphärische Funktion. Da

die Gesamtheit all dieser Operatoren ebenfalls einen Vektorraum bildet, können alle Überlegungen des vorangehenden Kapitels übernommen werden. Sondert man dementsprechend aus der Gesamtheit der Operatoren $D(Q|\partial, \partial^*)$ diejenigen mit der Darstellung

$$D_I(Q|\partial, \partial^*) = \Delta^{(6)} \circ D(Q-2|\partial, \partial^*)$$

aus (sie ergeben bei Anwendung auf $\mathcal{Y}(R)$ die Nullfunktion; dies ist eine Konsequenz der Tatsache, daß kein Element aus $U(Q)$ die Laplace-Gleichung lösen kann) so wird durch die übrigen nichttrivialen Operatoren $D_{II}(Q|\partial, \partial^*)$ der ganze Unterraum $W(Q)$ erzeugt, dessen Eigenschaften bereits ausführlich diskutiert wurden.

V DREHIMPULSKLASSIFIKATION

Für die physikalische Anwendung ist es von großer Bedeutung, Aussagen über das Drehimpulsverhalten des betrachteten Systems machen zu können. Aus diesem Grund müssen die hypersphärischen Funktionen aus $W(Q)$ noch so umkombiniert werden, daß sie Eigenfunktionen zur z-Komponente und zum Quadrat des gesamten Drehimpulses werden. Dazu zerlegen wir den Unterraum $W(Q)$ in drei disjunkte Teilräume

$$W(Q) = W_1(Q) \oplus W_2(Q) \oplus W_3(Q)$$

($\oplus$: direkte Summe), welche am einfachsten durch die Angabe der in ihnen enthaltenen Elemente charakterisiert werden können:

$$P_{II}(Q|A,0) \in W_1(Q)$$

$$P_{II}(Q|A,A^*) \in W_2(Q)$$

$$P_{II}(Q|0,A^*) \in W_3(Q)$$

Betrachten wir zunächst nur $W_1(Q)$ und $W_3(Q)$. Mit Hilfe der umgerechneten Komponenten des Drehimpulses

$$\vec{L} = -i \left(\vec{A} \times \nabla_{\vec{A}} + \vec{A}^* \times \nabla_{\vec{A}^*} \right)$$

bestimmen wir für beide Unterräume einen Satz von Operatoren T (aus der Gesamtheit der Operatoren D) mit ganz speziellen Eigenschaften.

Definition :

Die vom Grade x bzw. y homogenen Operatoren

$$T(x|L,M) \quad \text{und} \quad T^*(y|L,M)$$

$$L \gg 0, \quad -L \leq M \leq +L$$

heißen Tensoroperatoren, wenn gilt

$$[L_{\pm}; T(x|L,M)] = a(\pm) T(x|L, M \pm 1)$$

$$[L_z; T(x|L,M)] = M T(x|L,M)$$

$$[L_{\pm}; T^*(y|L,M)] = a(\pm) T^*(y|L, M \pm 1)$$

$$[L_z; T^*(y|L,M)] = M T^*(y|L,M)$$

$L_{\pm}$ sind die aus den Komponenten des gesamten Drehimpulses gebildeten Schrauboperatoren, L_z ist die z-Komponente. Weiterhin ist

$$a(\pm) = \sqrt{(L \mp M)(L \pm M + 1)}$$

Mit diesen Beziehungen kann nun gezeigt werden, daß dann auch stets

$$[L^2; T(x|L,M)] = L(L+1) T(x|L,M) + F$$

$$[L^2; T^*(y|L,M)] = L(L+1) T^*(y|L,M) + F^*$$

erfüllt ist. Da weiterhin die Operatoren F und F^* bei Anwendung auf die Funktion $\chi(R)$ stets Null ergeben, definieren T und T^* Drehimpulseigenfunktionen in den Variablen A_k^* bzw. A (Differentiation von $\chi(R)$ nach A_k liefert A_k^*).

Die explizite Konstruktion dieser Operatoren sei nun am Beispiel von $T(x|L,M)$ erläutert.

Definition:

Fundamentaloperatoren sind

$$a) \quad r^2 = \frac{\partial^2}{\partial A_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial A_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial A_3^2}$$

mit der Eigenschaft

$$[\vec{L} ; r^{2\alpha}] = 0 \quad \alpha > 0$$

und

$$b) \quad T(x|L=x, M=x) = N \left(\frac{\partial}{\partial A_1} + i \frac{\partial}{\partial A_2} \right)^x$$

mit geeignet gewählter Normierung N .

Durch die Festsetzung

$$[L_- ; T(x|x,x)] = a(-) T(x|x,x-1)$$

erhält man alle noch fehlenden Operatoren des Multipletts x -ter Stufe und maximalem Drehimpuls $L = x$.

Die resultierenden Funktionen

$$Z_{L=x,M}(A^*) = R^{2x+4} T(x|L=x,M) \circ Y(R)$$

stellen im cartesischen Raum der Variablen A^* die bekannten normierten Kugelfunktionen dar.

Die Operatoren zu $L \neq x$ gewinnen wir durch Einbeziehung des Fundamentaloperators $r^{2\alpha}$. Für $L < x$ definieren wir

$$T(x|L,M) = r^{2\alpha} T(x-2\alpha|x-2\alpha,M)$$

L kann, da $x - 2\alpha \geq 0$ sein muß, folglich nur die Werte

$$L = x, x - 2\alpha, x - 4\alpha, \dots \begin{cases} 0 & x \text{ gerade} \\ 1 & x \text{ ungerade} \end{cases}$$

annehmen. Zu jedem Wert von L gehört ein Multiplett aus $2L + 1$ Mitgliedern, sodaß es insgesamt

$$t(x) = \sum_L (2L + 1) = \frac{1}{2} (x+1)(x+2)$$

linear unabhängige gibt. Damit sind alle Operatoren zur Stufe x , die zu $W_3(x)$ gehören, konstruiert. Entsprechende Überlegungen gelten für $T^*(y|L,M)$.

In Tabelle 5 sind die zu den tiefsten Drehimpulswerten gehörigen Operatoren aufgelistet.

Tabelle 5 :

x	T(x L, M=L)		L	
0	1		0	
1	D ₊		1	
2	D ₊ ²	r ²	2	0
3	D ₊ ³	r ² D ₊	3	1
4	D ₊ ⁴	r ² D ₊ ²	4	2 0
⋮		⋮		⋮

Als Abkürzung wurde

$$D_+ = \frac{\partial}{\partial A_1} + i \frac{\partial}{\partial A_2}$$

eingeführt.

Aus den jetzt zur Verfügung stehenden Drehimpulseigenfunktionen der Teilräume $W_1(x)$ und $W_3(y)$ lassen sich die Elemente von $W_2(Q)$ durch Bildung des direkten Produktes berechnen. Man erhält

$$T(Q | L, M) = \sum_{M_1 + M_2 = M} C(L_1 L_2 L | M_1 M_2 M) T(x | L_1 M_1) \circ T^*(y | L_2 M_2)$$

mit den bekannten Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Das Produkt $T(x | L_1 M_1) \circ T^*(y | L_2 M_2)$ hat stets die Struktur

$$r^{2\alpha} (r^*)^{2\beta} T(x-2\alpha | x-2\alpha, M_1) T^*(y-2\beta | y-2\beta, M_2)$$

und damit den Homogenitätsgrad

$$Q = 2\alpha + 2\beta + L_1 + L_2$$

Der Drehimpuls L gehorcht der bekannten Dreiecksregel

$$x + y - 2(\alpha + \beta) \geq L \geq |x - y + 2(\alpha - \beta)|$$

Der Vollständigkeit wegen ist hier noch einzufügen, daß der Eigenwert der Parität durch Q zu

$$\pi = (-1)^Q$$

festgelegt ist.

Zur eindeutigen Kennzeichnung der hypersphärischen Funktionen, welche jetzt vollständig klassifiziert vorliegen, ist die Angabe von x , L_1 , y , L_2 , L , M , π und p nötig. Die Gesamtheit dieser Zahlen werden wir in Zukunft stets mit

$$k = x, L_1, y, L_2$$

und

$$\sigma = L, M, \pi, p$$

abkürzen. Für die so gekennzeichneten Elemente $P_{II}(Q|A, A^*)$ aus $W(Q)$ führen wir deshalb das Symbol

$$\mathfrak{J}_{Q,k}^{\sigma}$$

ein.

Abschließend sei noch erwähnt, daß die Auswahlregel für L noch etwas modifiziert werden kann. Da wir die Dimension des Raumes $W(Q)$ bereits kennen, kann durch Abzählen festgestellt werden, daß neben $T(x|L_1, M_1)$ aus $W_1(x)$ und $T^*(y|L_2, M_2)$ aus $W_3(y)$ nur solche Clebsch-Gordan-Reihen berücksichtigt werden müssen, die für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ zum Drehimpulswert

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{oder} \quad L = L_1 + L_2 - 1$$

gehören.

Das Verfahren der Drehimpulsklassifikation erläutern wir am Beispiel der Funktionen des Homogenitätsgrades $Q = 6$ für den invarianten Unterraum $W(Q|inv)$. In diesem Fall sind die möglichen Werte der Homogenitätsgrade x bzw. y der Operatoren $T(x|L_1, M_1)$ und $T^*(y|L_2, M_2)$ wegen der Auswahlregel $|x - y| = 3w$ ($w = 0, 1, \dots$) bestimmt zu

$$\begin{array}{rcccl} x & = & 6 & 3 & 0 \\ y & = & 0 & 3 & 6 \end{array} \quad Q = x + y$$

Die zu erwartenden Werte des Gesamtdrehimpulses sind dann

$$L = L_1 = 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad \text{für} \quad \underline{(x|y) = (6|0)}$$

$$\begin{array}{rcccl} L & = & 6_B & 5_F & \begin{array}{|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\ & & 4_B & 3_F & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ & & 4_F & 3_B & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ & & 2_B & 1_F & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \text{für} \quad \underline{(x|y) = (3|3)}$$

(B: Bose , F: Fermi)

In diesem Fall ist $L_1 = 3$ oder 1 und $L_2 = 3$ oder 1. L genügt der Dreiecksregel $|L_1 - L_2| \leq L \leq L_1 + L_2$. Die eingerahmten Drehimpulswerte brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Der Index B bzw. F bedeutet, daß zu diesem Drehimpulswert nur eine Bose- bzw. Fermifunktion gehört ($x = y$!). Für alle anderen L -Werte bekommen wir sowohl Bose- wie auch Fermifunktionen.

$$L = L_2 = 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad \text{für} \quad \underline{(x|y) = (0|6)}$$

Durch Abzählen erhält man

$$\dim W(Q|inv) = 120$$

$$\dim W(Q|Bose) = 62$$

$$\dim W(Q|Fermi) = 58$$

in Übereinstimmung mit den allgemeinen Überlegungen.

VI SPIN- UND ISOSPINFUNKTIONEN

Wenn die Systembestandteile innere Eigenschaften besitzen, wie z.B. Spin oder Isospin, so bedarf der Ortsteil der hypersphärischen Funktionen einer Ergänzung.

a) Spin

Zu jedem Teilchen des Systems gehört eine Spinfunktion

$$s_j^+ \quad j = 1, 2, 3$$

mit den Eigenschaften

$$\sigma_j^2 s_j^+ = \frac{3}{4} s_j^+ \quad \sigma_{j,z} s_j^+ = \pm \frac{1}{2} s_j^+$$

(σ_j^2 , $\sigma_{j,z}$ sind die Operatoren des Spindrehimpulses des j -ten Teilchens).

Aus diesen Funktionen gehen wir mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Reihen über zu Funktionen des möglichen Gesamtspins

$$S = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Die Auswertung der Reihen führt auf

$$s_s(\frac{3}{2}|\frac{3}{2}) = s_1^+ s_2^+ s_3^+ = s_s^{3/2}$$

$$\begin{aligned} s_a(\frac{1}{2}|\frac{1}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2 s_1^+ s_2^+ s_3^- - s_1^+ s_2^- s_3^+ - s_1^- s_2^+ s_3^+) \\ &= s_a^{1/2} \end{aligned}$$

$$s_b(\frac{1}{2}|\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (s_1^+ s_2^- s_3^+ - s_1^- s_2^+ s_3^+) = s_b^{1/2}$$

Bei Teilchenvertauschung ist S_s total symmetrisch, S_a und S_b zeigen dagegen folgendes Verhalten im Falle einfacher Vertauschungen:

$$S_{a,p}^{1/2} = -\frac{1}{2} S_a^{1/2} - \frac{1}{2} S_b^{1/2}$$

$$S_{a,p}^{1/2} = -\frac{1}{2} S_a^{1/2} + \frac{1}{2} S_b^{1/2}$$

$$S_{a,p}^{1/2} = + S_a^{1/2}$$

$$S_{b,p}^{1/2} = -\frac{1}{2} S_a^{1/2} + \frac{1}{2} S_b^{1/2}$$

$$S_{b,p}^{1/2} = +\frac{1}{2} S_a^{1/2} + \frac{1}{2} S_b^{1/2}$$

$$S_{b,p}^{1/2} = - S_b^{1/2}$$

Diese Gleichungen lassen sich nach Einführung der komplexen Linearkombinationen

$$S_+ = - (S_a^{1/2} + i S_b^{1/2}) \quad S_- = - (S_a^{1/2} - i S_b^{1/2})$$

in der Form

$S_{+,p} = -z S_-$	$S_{-,p} = -z^* S_+$
--------------------	----------------------

schreiben.

b) Isospin

Durch analoge Überlegungen können die Isospinfunktionen η der einzelnen Teilchen umgeformt werden.

c) Klassifikation der Spin-Isospin-Funktion

Tabelle 6 :

T	S	Spin-Isospinfunktion		Klassifikation	
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$S_s \eta_s$		+1	
	$\frac{1}{2}$	$-S_+ \eta_s$	$-S_- \eta_s$	z	z^*
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-S_s \eta_-$	$-S_s \eta_+$	z	z^*
	$\frac{1}{2}$	$S_+ \eta_- + S_- \eta_+$		-1	
	$\frac{1}{2}$	$S_+ \eta_+$	$S_- \eta_-$	z^2	$(z^*)^2$

Die vollständige hypersphärische Funktion besteht aus dem Ortsanteil und der Spin-Isospinfunktion, wenn man ein Nukleonsensystem beschreiben will. Ihr Verhalten bei Teilchenvertauschung ist eindeutig durch das der Einzelbestandteile festgelegt.

Damit die Funktion einem bestimmten Drehimpuls J entspricht, müssen Ortsteil und Spinfunktion in richtiger Weise zusammengekoppelt werden.

T E I L B

EINFÜHRUNG VON INNEREN KOORDINATEN UND EULER -
SCHEN WINKELN

I INNERE KOORDINATEN

Die praktische Behandlung des Dreikörperproblems mit hyper-sphärischen Funktionen wird bedeutend erleichtert, wenn man an Stelle der komplexen Koordinatenvektoren $\vec{A}$ und $\vec{A}^*$ einen geeigneten Satz verallgemeinerter Koordinaten im Ortsraum verwendet. So erfordert die Berechnung der Potentialmatrixelemente nach Einführung von Eulerschen Winkeln nur noch drei Integrationen bezüglich der inneren Koordinaten, da die potentielle Energie bei Zweiteilchenwechselwirkung von der Orientierung unabhängig ist.

Wir gehen aus von den inneren Koordinaten ϑ, r, u , welche von H.RUDER [3] eingeführt wurden. Sie sind mit den Relativkoordinaten $\vec{\vartheta}$ und $\vec{r}$ (vgl. Kapitel A/I) über die Beziehungen

$$\vartheta = |\vec{\vartheta}| \quad r = |\vec{r}| \quad \vec{\vartheta} \cdot \vec{r} = \vartheta \cdot r \cos u$$

verknüpft. Die Gestalt des aus den drei Massenpunkten gebildeten Dreiecks wird eindeutig durch diese Koordinaten festgelegt. Ihr Definitionsbereich ist offensichtlich

$$0 \leq \vartheta < \infty \quad 0 \leq r < \infty \quad 0 \leq u \leq \pi$$

Bei Teilchenvertauschung transformieren sich ϑ, r und u in komplizierter Weise. Wir versuchen deshalb, solche Koordinaten zu finden, welche bei Permutation entweder bereits invariant sind oder wenigstens ein einprägsames Verhalten zeigen. Dazu werden zuerst in der ϑ, r - Ebene ebene Polarkoordinaten eingeführt:

$$\alpha) \quad \vartheta = R \cos \frac{\Psi}{2} \quad 0 \leq R < \infty$$

$$r = R \sin \frac{\Psi}{2} \quad 0 \leq \Psi \leq \pi$$

Neben R kann auch ε anschaulich gedeutet werden. Berechnet man die Fläche F des Dreiecks, so erhält man

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{2} \vec{g} \times \vec{r} \sqrt{\frac{3}{2}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{3} g r \sin u = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{3} R^2 \sin \psi \sin u = \frac{1}{4} \sqrt{3} R^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

und sieht, daß ε als Maß für die reduzierte Fläche

$$F_0 = \frac{4 F}{\sqrt{3} R^2} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

genommen werden kann. Dem gleichseitigen Dreieck kann der ε -Wert 0 und der linearen Kette der ε -Wert 1 zugeordnet werden. Diese Zuordnung entspricht den Grenzfällen größter bzw. kleinster Dreiecksfläche. Da die Fläche F eine invariante Größe bei Teilchenvertauschung ist, hat ε notwendigerweise ebenfalls diese Eigenschaft. Im Gegensatz zu R und ε kann die dritte Variable ω nicht mit einer anschaulichen Eigenschaft des Dreiecks verknüpft werden. Weiterhin ist ω auch nicht invariant bei Permutation. Die Beziehungen zu den komplexen Koordinaten $\vec{A}$ und $\vec{A}^*$, welche man zur Umrechnung der hypersphärischen Funktionen benötigt, werden durch die folgenden Gleichungen hergestellt.

$$a1) \quad R^2 = \sum_{k=1}^3 A_k A_k^*$$

$$a2) \quad \varepsilon^2 R^4 = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(A_1^{*2} + A_2^{*2} + A_3^{*2})$$

Wegen

$$R^2 = g^2 + r^2 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i < j=1}^3 (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$$

ist die Variable R invariant bei Teilchenvertauschung und auf Grund des Zusammenhangs mit den kartesischen Koordinaten $\vec{r}_j$ ein Maß für die Größe des Systems. Das Volumenelement der inneren Koordinaten hat die Gestalt

$$d\tau_I = R^5 dR \sin^2 \psi d\psi \sin u du$$

und wird durch die nächste Transformation aus formaler Sicht in die "kartesische" Form gebracht.

$\alpha 2)$

$$X = \cos \psi \quad -1 \leq X \leq +1$$

$$Y = \sin \psi \cos u \quad -1 \leq Y \leq +1$$

$$d\tau_I = R^5 dR dX dY$$

Erneute Einführung von Polarkoordinaten ε, ω in der "X,Y" - Ebene durch

$\alpha 3)$

$$X = \varepsilon \cos \omega \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$Y = \varepsilon \sin \omega \quad -\pi \leq \omega \leq +\pi$$

$$d\tau_I = R^5 dR \varepsilon d\varepsilon d\omega$$

definiert die endgültig verwendeten inneren Koordinaten.

Man sieht sofort die offensichtliche Invarianz von R und ϵ bei Teilchenvertauschung

a3)

$$R^2 \epsilon e^{i\omega} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

Wegen

$$A_{p,1}^2 + A_{p,2}^2 + A_{p,3}^2 = z^2 (A_1^{*2} + A_2^{*2} + A_3^{*2})$$

folgt für das Verhalten von ω bei Permutation die wichtige Beziehung

$$e^{i\omega_p} = z^2 e^{-i\omega}$$

Sie zeigt, daß der Winkel ω auf Grund des Faktors z^2 um 0° , 120° oder 240° springt.

Die hier eingeführten inneren Koordinaten R , ϵ und ω sind von denen der Arbeit | 2 | zu unterscheiden, da der Winkel ω nicht mit dem Winkel β von ZICKENDRAHT identifiziert werden kann.

II EULERSCHE WINKEL

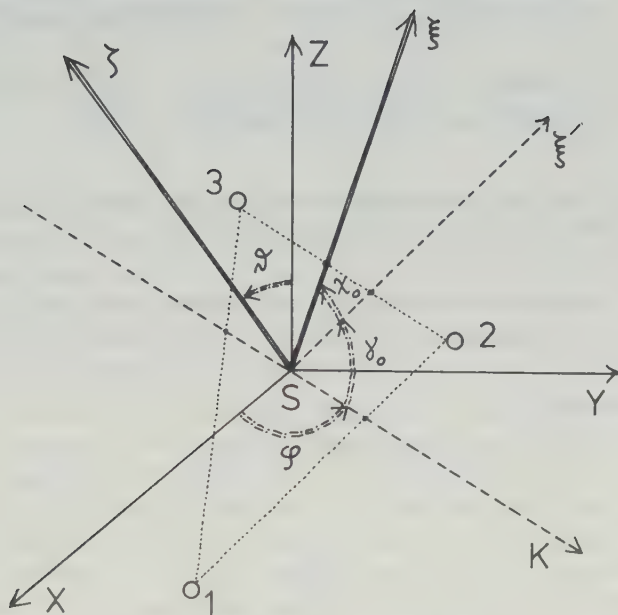


Abb. 4 :

Eulersche Winkel ϑ , φ und χ , welche die Orientierung des körpergebundenen ξ, η, ζ - Systems in Bezug auf das raumfeste Schwerpunktsystem beschreiben.

Die Eulerschen Winkel ϑ, φ, χ werden grundsätzlich gegen den Uhrzeiger gezählt und sind durch folgende Vorschriften eindeutig festgelegt.

B1) Der Winkel zwischen der raumfesten X-Achse und der Knotenlinie K (dies ist die Schnittgerade der Dreiecksfläche mit der X,Y - Ebene) ist φ .

B2) Der Winkel zwischen der raumfesten Z-Achse und der Flächennormalen ζ ist ϑ .

Diese Definitionen entsprechen der in der Literatur gebräuchlichen Wahl von Eulerschen Winkeln.

B3) Der Winkel zwischen der Knotenlinie K und der körpergebundenen ξ -Achse ist χ .

Üblicherweise wird χ so gewählt, daß die ξ -Achse mit einer der momentanen Hauptträgheitsachsen des Teilchensystems in der Dreiecksebene übereinstimmt. Dieser Konvention schließen wir uns nicht an. Wir benützen eine Definition, welche auf einen Winkel χ führt, der im Zusammenhang mit spezifischer Entkopplung | 4 | und der Berechnung eines effektiven Trägheitsmoments | 11 | erstmals explizit bestimmt wurde.

Zuerst wird ein Winkel γ_0 eingeführt, der so beschaffen ist, daß die zugehörige ξ_0 -Achse parallel zur Verbindungsgeraden von Teilchen 1 und 2 wird. Durch eine zusätzliche Drehung um die Flächennormale um den Winkel χ_0 , der in den Koordinaten R, ψ und u die mathematische Gestalt

$$\chi_0 = \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4} - \arctan \left[\tan\left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) \right]$$

hat, wird der endgültige Winkel χ durch

$$\chi = \gamma_0 + \chi_0$$

definiert. Die Ermittlung von χ_0 als nichtsinguläre

Lösung einer speziellen partiellen Differentialgleichung ist in | 11 | ausführlich beschrieben. Würde man für χ_0 die singuläre Lösung

$$\chi_0^s = \frac{1}{2} \arccot \left[\cot 2u + \frac{\cot^2 \frac{\psi}{2}}{\sin 2u} \right]$$

wählen, so wäre die durch χ bestimmte ξ -Achse eine Hauptträgheitsachse des Systems. Unsere Definition der ξ -Achse steht also nicht unmittelbar im Zusammenhang mit dem momentanen Trägheitstensor. Ein fundamentaler Unterschied wird klar, wenn wir den Zusammenhang mit den komplexen Koordinaten herstellen. Wir erhalten

b1)

$$R^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \cos \mathcal{J} = i (A_1 A_2^* - A_1^* A_2)$$

b2)

$$R^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \mathcal{J} e^{i\varphi} = -i (A_3 A_+^* - A_3^* A_+)$$

$$(A_+ = A_1 + iA_2)$$

Man sieht, daß sich beide Winkel sehr einfach bei Teilchenvertauschung transformieren:

$\mathcal{J}_p = \pi - \mathcal{J}$
$\mathcal{G}_p = \pi + \mathcal{G}$

b3)

$$-\frac{i}{2} R \sin \mathcal{J} \left[\sqrt{+} e^{i\chi} - \epsilon e^{-i\omega} \sqrt{-} e^{-i\chi} \right] = A_3^*$$

$$(\sqrt{\pm} = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}})$$

An Hand dieser Gleichung können wir das Verhalten bei Permutation ermitteln. Es ergibt sich für unseren Winkel

$$e^{i\chi_p} = -z^* e^{-i\chi}$$

während im Fall von Hauptträgheitsachsen die Beziehung

$$\chi_p = \pi - \chi$$

erfüllt sein müßte. Dies hat zur Folge, daß die bisher in der Literatur verwendeten Wellenfunktionen grundsätzlich anders in Bezug auf ihr Verhalten bei Teilchenvertauschung klassifiziert sind als in dieser Arbeit.

III DER LAPLACE-OPERATOR

Rechnen wir den 6-dimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta^{(6)} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial A_k \partial A_k^*}$$

auf den nun definierten Koordinatensatz um, so erhalten wir eine Form, die an das Zweikörperproblem erinnert:

$$\Delta^{(6)} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cdot \Lambda(\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi)$$

Der Operator Λ zerfällt dabei in innere, Kopplungs- und Rotationsanteile gemäß

$$\Lambda = \Lambda_i + \Lambda_k + \Lambda_a$$

Dabei ist

$$\Lambda_i = 4 \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 3\varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right]$$

$$\Lambda_k = \frac{4}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} L_3$$

$$\begin{aligned} \Lambda_a = & -\frac{2}{\hbar^2} \left[\frac{1}{1 - \varepsilon^2} L^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \right) L_3^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon e^{-i\omega}}{1 - \varepsilon^2} L_+^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon e^{i\omega}}{1 - \varepsilon^2} L_-^2 \right] \end{aligned}$$

$$(L_{\pm} = L_3 \pm i L_2)$$

L_1, L_2, L_3 sind die auf die körpergebundenen Achsen projizierten Komponenten des Gesamtdrehimpulses.

Da die Transformationsgleichungen a_1, a_2, a_3 und b_3 eine einfache Umrechnung der hypersphärischen Funktionen ermöglichen, können wir den allein wichtigen Winkelanteil $z_{Q,k}^5(\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi)$ abspalten. Es ist

$$z_{Q,k}^5(\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi) = \frac{1}{R^{+Q}} \mathfrak{z}_{Q,k}^5(R, \varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi)$$

Er genügt wegen $\Delta^{(6)} \mathfrak{z}_{Q,k}^5 = 0$ der Differentialgleichung

$$\Delta z_{Q,k}^5 = -Q(Q+4) z_{Q,k}^5$$

Die Bezeichnung "Winkelanteil" für $z_{Q,k}^5$ wurde gewählt, da die Variablen $\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi$ und χ im sechsdimensionalen Konfigurationsraum die Richtung des Ortsvektors und damit einen Punkt auf der Einheitskugel in diesem Raum eindeutig festlegen. Die Länge dieses Ortsvektors ist dann durch die Variable R bestimmt.

IV HYPERSPHÄRISCHE FUNKTIONEN ZU $L = 0^+$

Die Berechnung der hypersphärischen Funktionen und ihre Umrechnung auf innere Koordinaten und Eulersche Winkel wird am Beispiel derjenigen Funktionsklasse erläutert, die zum Drehimpulseigenwert $L = 0$ gehört.

Der Winkelanteil hat auf Grund des Konstruktionsverfahrens aus Teil A die Form

$$Z_{Q,k}^{\mathcal{G}} = R^{Q+4} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)^{\alpha} (D_1^{*2} + D_2^{*2} + D_3^{*2})^{\beta} \cdot \mathcal{Y}(R)$$

$$Q = 2(\alpha + \beta) \quad \alpha \leq \beta \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{G} \hat{=} (L=0, M=0, \pi=+1, p)$$

Die Ausführung der Differentiationen führt auf

$$Z_{Q,k}^{\mathcal{G}} = \frac{1}{R^Q} \sum_{f=0}^{\alpha} g_f(\alpha|\beta) R^{4(\alpha-f)} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{\beta-\alpha+f} \cdot (A_1^{*2} + A_2^{*2} + A_3^{*2})^f$$

Die Koeffizienten $g_f(\alpha|\beta)$ sind durch die Rekursion

$$g_0(\alpha+1|\beta) = -2 g_0(\alpha|\beta) \cdot (\beta-\alpha) \cdot (2\alpha+2\beta+3)$$

$$g_f(\alpha+1|\beta) = -2 g_f(\alpha|\beta) \cdot (\beta-\alpha+f) (2\alpha+2\beta+2f+3) + 2 g_{f-1}(\alpha|\beta) \cdot (\beta+f) (2\beta+2f+1)$$

$$1 \leq f \leq \alpha$$

$$g_{\alpha+1}(\alpha+1|\beta) = g_{\alpha}(\alpha|\beta) (2\alpha+2\beta+2)(2\alpha+2\beta+3)$$

definiert mit der Anfangsbedingung

$$g_0(1|\beta) = -\beta \qquad g_1(1|\beta) = \beta + 1$$

Es kann jetzt leicht bewiesen werden, daß

$$g_f(\alpha|\beta) = (-1)^{\alpha+f} \binom{\alpha}{f} \binom{\beta+f}{\alpha} \alpha!$$

Lösung dieser Rekursion ist.

Wegen

$$Z_{Q,k} = \frac{1}{R^Q} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{\beta-\alpha} \sum_{f=0}^{\alpha} g_f(\alpha|\beta) \cdot R^{4(\alpha-f)}$$

$$\left[(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) (A_1^{*2} + A_2^{*2} + A_3^{*2}) \right]^f$$

erhalten wir hieraus als Endergebnis der Umrechnung auf unsere Koordinaten eine in den Variablen ε und ω separierte Funktion:

$$Z_{Q,k}^G(\varepsilon, \omega) = \varepsilon^{\beta-\alpha} e^{i(\beta-\alpha)\omega} \sum_{f=0}^{\alpha} g_f(\alpha|\beta) \varepsilon^{2f}$$

Das Symmetrieverhalten dieser Funktionen wird allein durch den ω -abhängigen Exponentialfaktor bestimmt. Bose- bzw. Fermifunktionen erhält man beispielsweise für $\beta-\alpha = 3w$. Für die einfachsten Fälle ist das ε -Polynom des Winkelanteils in der folgenden Tabelle notiert.

Tabelle 7 :

Q	$\alpha=0 \beta$	$\alpha=1 \beta$	$\alpha=2 \beta$	...
0	1	-	-	
2	ε	-	-	
4	ε^2	$(-1+2\varepsilon^2)$	-	
6	ε^3	$(-2+3\varepsilon^2)$	-	...
8	ε^4	$(-3+4\varepsilon^2) \varepsilon^2$	$(2-12\varepsilon^2 + 12\varepsilon^4)$	
10	ε^5	$(-4+5\varepsilon^2) \varepsilon^3$	$(6-24\varepsilon^2 + 20\varepsilon^4) \varepsilon$	
$\vdots$			$\vdots$	

Für verschiedene Werte $(\beta-\alpha)$ sind die Funktionen $Z_{Q,k}^G$ automatisch orthogonal, da die ω - Abhängigkeit ja durch die komplexe Exponentialfunktion $\exp(i(\beta-\alpha)\omega)$ beschrieben wird, für welche die Beziehung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(\beta-\alpha)\omega} e^{-i(\bar{\beta}-\bar{\alpha})\omega} d\omega \sim \delta_{\beta-\alpha, \bar{\beta}-\bar{\alpha}}$$

gilt. Es ist also noch zu zeigen, daß die ε -Polynome, welche gleichen Werten von $\beta-\alpha$ entsprechen, ebenfalls orthogonal sind. Dazu bringen wir die Differentialgleichung der hypersphärischen Funktionen für fest vorgegebenen Wert $m = \beta - \alpha$ in die selbstadjungierte Form

$$(q_1 y')' + (q_2 + \tau q_3) y = 0$$

durch den Ansatz

$$y = \varphi(\varepsilon) z_{Q,k}^{\sigma}(\varepsilon, \omega)$$

Dabei ist

$$\tau = \frac{1}{4} Q (Q + 4) \quad \varphi = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$q_1 = \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon^2) \quad q_2 = \frac{1 - m^2}{\varepsilon^3} - \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \quad q_3 = \frac{1}{\varepsilon}$$

Sind $z_{Q,k}$ und $z_{\bar{Q},\bar{k}}$ Eigenfunktionen zu den Eigenwerten τ bzw. $\bar{\tau}$, so gilt:

$$(\tau - \bar{\tau}) \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} y \bar{y} \, d\varepsilon = \left[q_1 (y' \bar{y} - y \bar{y}') \right]_0^1 = 0$$

Wir brauchen also keine speziellen Randbedingungen zu fordern. Die Orthogonalität wird durch die Funktion q_1 und den Definitionsbereich von ε gewährleistet. Eine weitere formale Vereinfachung der Darstellung der - Polynome erreicht man, wenn man die Variable

$$t = 1 - \varepsilon^2$$

einführt. Der Ansatz

$$z_{Q,k}^{\sigma} = \sqrt{(1-t)^m} g(t) e^{im\omega} \quad m = \beta - \alpha$$

führt zur Bestimmung von $g(t)$ auf die hypergeometrische

Differentialgleichung, sodaß der Winkelanteil endgültig in der Form

$$Z_{Q,k}^G = \varepsilon^m {}_2F_1(u - \kappa; u + \kappa + 1; 1; 1 - \varepsilon^2) e^{im\omega}$$

geschrieben werden kann. Als Abkürzungen wurden eingeführt

$$u = \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \quad \kappa = \frac{1}{4} Q$$

Das Symbol ${}_2F_1$ steht für die Reihe

$${}_2F_1(a;b;c;z) = 1 + \frac{a}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2! c(c+1)} z^2 + \dots$$

(hypergeometrische Reihe)

V HYPERSPHÄRISCHE FUNKTIONEN ZU $L \neq 0$

Die möglichen Funktionen zu $L \neq 0$ charakterisieren wir durch die Angabe der ihnen entsprechenden Fundamentaloperatoren.

$\alpha)$

$$\begin{array}{lll} \underline{L = 1^-} : & D_+ & D_+^* \\ \underline{L = 2^+} : & D_+^2 & D_+ D_+^* \quad (D_+^*)^2 \\ \underline{L = 3^-} : & D_+^3 & D_+^2 D_+^* \quad (D_+^*)^2 D_+ \quad (D_+^*)^3 \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Im Clebsch-Gordan-Formalismus gehören diese Operatoren zu $L = L_1 + L_2$ und $M = L$

$\beta)$

$$\begin{array}{lll} \underline{L = 1^+} : & D_3 D_+^* - D_3^* D_+ & \\ \underline{L = 2^-} : & D_3^* D_+^2 - D_+^* D_+ D_3 & D_3 (D_+^*)^2 - D_+ D_+^* D_3^* \\ \underline{L = 3^+} : & D_+^* D_3 D_+^2 - D_3^* D_+^3 & D_+ D_3^* (D_+^*)^2 - D_3 (D_+^*)^3 \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Diese gehören zu $L = L_1 + L_2 - 1$ und $M = L$

Alle Operatoren zu vorgegebenem Drehimpuls L^π erhält man aus diesen Grundbausteinen durch Multiplikation mit dem Vorfaktor

$$(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)^\alpha (D_1^{*2} + D_2^{*2} + D_3^{*2})^\beta$$

Die Umrechnung der Funktionen auf innere Koordinaten und Eulersche Winkel wird besonders einfach, wenn man als Projektionsquantenzahl $M = 0$ wählt (mehrfache Anwendung von Schrauboperatoren ist erforderlich). Die Wirkung von $(L_-)^n$ auf die entscheidenden Funktionsbestandteile ist in Tabelle 8 festgehalten.

Tabelle 8 :

$$L_- A_+ = -2 A_3$$

$$L_- A_3 = A_-$$

$$(L_-)^2 A_+^2 = 4 (3 A_3^2 - r^2)$$

$$(L_-)^2 A_+ A_+^* = 4 (3 A_3 A_3^* - R^2)$$

$$(L_-)^3 A_+ A_+^{*2} = 24 \left[2 A_3^* (R^2 - A_3 A_3^*) + A_3 (r^{*2} - 3 A_3^{*2}) \right]$$

$$(L_-)^3 A_+^{*3} = -24 A_3^* (5 A_3^{*2} - 3 r^{*2})$$

:

T E I L C

DAS DREIKÖRPERPROBLEM MIT SPEZIELLER WECHSELWIRKUNG

I LÖSUNGSTHEORIE

Für den Hamiltonoperator der Relativbewegung eines Dreibosonensystems, dessen Wechselwirkung durch Zweikörper - potentiale beschrieben werden kann, entwickeln wir unter Verwendung der hypersphärischen Funktionen eine Lösungstheorie. Die Umrechnung von

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^{(6)} + \sum_{i < j=1}^3 V_{ij}(\vec{s}, \vec{r})$$

(vgl. Kapitel A/I) auf innere Koordinaten und Eulersche Winkel führt auf

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{4}{R^2} \Lambda \right) + V(R, \varepsilon, \omega)$$

Die potentielle Energie V ist dabei nur eine Funktion der inneren Koordinaten.

Ganz allgemein kann die Wellenfunktion Ψ der stationären Zustände von H_0 mit dem Ansatz

$$\psi^\sigma(R, \varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi) = \sum_{v=0} f_v(R) Z_v^\sigma(\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi)$$

gewonnen werden. Der Summationsindex v steht stellvertretend für das Paar (Q, k) . Die Größe σ selbst wird fest gewählt, sodaß die Wellenfunktion ψ^σ nach allen Invarianten von H_0 klassifiziert ist. Die Orthogonalitätseigenschaften der Entwicklungsfunktionen Z_v^σ werden dazu benutzt, die Schrödingergleichung

$$H_0 \psi^\sigma = E_0 \psi^\sigma$$

in ein unendliches, gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen umzuwandeln. Dies geschieht, nachdem die Entwicklung für ψ^{ϵ} eingesetzt wurde, durch Multiplikation mit $Z_{\bar{v}}^{\epsilon}$ und Integration über alle Variablen des Winkelanteils. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{\bar{v}}}{d R^2} + \frac{5}{R} \frac{d f_{\bar{v}}}{d R} - \frac{Q(Q+4)}{R^2} f_{\bar{v}} + \alpha^2 f_{\bar{v}} &= \\ &= \sum_{v=0} f_v \langle Z_{\bar{v}}^{\epsilon} | \tilde{V}(R, \epsilon, \omega) | Z_v^{\epsilon} \rangle \end{aligned}$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_0 \quad \tilde{V} = \frac{2m}{\hbar^2} V$$

Das Matricelement

$$\langle Z_{\bar{v}}^{\epsilon} | \tilde{V}(R, \epsilon, \omega) | Z_v^{\epsilon} \rangle = M_{\bar{v}v}(R)$$

ist dann nur noch eine Funktion von R und verkoppelt alle Entwicklungskoeffizienten $f_v(R)$.

Zur Lösung von Differentialgleichungen dieser Art kann man auf ein kompliziertes Verfahren von J.C.Y.CHENG [13] zurückgreifen. Für das spezielle Zweiteilchenpotential

$$V_{ij} = S_1 r_{ij}^{-2} + S_2 r_{ij}^2$$

entwickeln wir eine besondere Lösungsmethode, welche auf analytische Formeln für Eigenwerte und Eigenfunktionen führt.

Das Verfahren gestattet eine formale und kompakte Beschreibung, wenn man die unendlichen Spaltenvektoren

$$f(R) = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_v \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \psi^G = \begin{pmatrix} \psi_0^G \\ \psi_1^G \\ \psi_2^G \\ \vdots \\ \psi_v^G \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eingeführt. Die Wellenfunktion ψ^G kann dann durch das Skalarprodukt

$$\psi^G = |f\rangle^T \psi^G$$

ausgedrückt werden und das Differentialgleichungssystem wird eine Matrizengleichung, welche bei Berücksichtigung des auf die inneren Koordinaten umgerechneten Ausdrucks für das Potential wegen

$$V(R, \epsilon, \omega) = S_1 R^{-2} I(\epsilon, \omega) + 3 S_2 R^2$$

die Form

$$\frac{d^2 f}{d R^2} + \frac{5}{R} \frac{d f}{d R} - \frac{J(v) + S_1 m^G}{R^2} f - 3 \tilde{S}_2 R^2 f + \alpha^2 f = 0$$

$$\tilde{S}_2 = \frac{2m}{\hbar^2} S_2$$

hat. $\mathcal{J}(\nu)$ ist eine Diagonalmatrix, welche die Eigenwerte $Q(Q+4)$ der Entwicklungsfunktionen Z_{ν}^{ϵ} enthält. $\mathcal{M}^{\epsilon}$ ist die Gesamtheit der Matrixelemente des von ϵ und ω abhängigen Anteils des Potentials:

$$\mathcal{M}^{\epsilon} = \langle Z_{\nu}^{\epsilon} | \tilde{I}(\epsilon, \omega) | Z_{\nu}^{\epsilon} \rangle$$

mit $\tilde{I} = \frac{2m}{\hbar^2} I$.

Das Lösungsverfahren besteht nun darin, im Raum der Spaltenvektoren $\mathcal{F}$ durch

$$\mathcal{F} = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{G}$$

eine geeignete Transformation zu neuen Spaltenvektoren vorzunehmen. Diesen Übergang beschreiben wir mit einer nichtsingulären Matrix $\mathcal{Y}$, die den Gleichungen

$$\mathcal{Y}^{-1} (\mathcal{J}(\nu) + \sum_{\epsilon} \mathcal{M}^{\epsilon}) \mathcal{Y} = \mathcal{J}_E$$

$$\mathcal{Y}^{-1} \mathcal{Y} = \mathcal{I}$$

genügen soll. $\mathcal{J}_E$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte dieser Hauptachsentransformation | 14 |. Die numerische Berechnung der Eigenwerte d kann mit Hilfe der Determinante

$$| \mathcal{J}(\nu) + \sum_{\epsilon} \mathcal{M}^{\epsilon} - d \mathcal{I} | = 0$$

erfolgen. Wir erhalten eine unendliche Folge von Eigenwerten d_r ($r = 0, 1, 2, \dots$), welche Funktionen des Poten-

tialparameters S_1 und der durch $\mathcal{C}$ festgelegten Quantenzahlen sind:

$$d_r = d_r(S_1 | \mathcal{C})$$

Die Differentialgleichung selbst geht bei dieser Transformation über in

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dR^2} + \frac{5}{R} \frac{d\mathcal{G}}{dR} - \frac{\mathcal{J}_E}{R^2} \mathcal{G} - 3 \tilde{S}_2 R^2 \mathcal{G} + \kappa^2 \mathcal{G} = 0$$

Da die Matrix $\mathcal{J}_E$ eine Diagonalmatrix ist, sind die Gleichungen des Systems vollständig entkoppelt. Dies bedeutet, daß für einen bestimmten Energieeigenwert κ_0^2 die zugehörige Lösungsspalte $\mathcal{G}$ die Form

$$\mathcal{G}_r(R) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g_r(R) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

haben muß. Die Wellenfunktion $\psi^{\mathcal{C}}$ ist deshalb wegen

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{C}} &= [\gamma \mathcal{G}]^T \cdot \eta^{\mathcal{C}} = [\mathcal{G}]^T \gamma^T \eta^{\mathcal{C}} \\ &= g_r(R) \sum_{v=0}^{\infty} s_r^v z_v^{\mathcal{C}}(\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi) \end{aligned}$$

ein Separationsansatz für Radialfunktion und Winkelanteil.

II EIGENWERTE UND EIGENFUNKTIONEN

a) Harmonische Wechselwirkung

Zunächst untersuchen wir den Sonderfall rein harmonischer Wechselwirkung $V_{ij} = S_2 r_{ij}^2$. Dies ist der einzige Fall eines Dreikörperproblems, der ohne Verwendung numerischer Methoden quantitativ gelöst werden kann, da wegen $S_1 = 0$ die Matrix $S_1 \mathcal{M}^6$ die Nullmatrix ist und die Transformationsmatrix $\mathcal{U}$ somit die Einheitsmatrix $\mathcal{E}$ sein muß. Da das Differentialgleichungssystem im Raum der Spalten $\mathcal{F}$ somit bereits in entkoppelter Form vorliegt -

$$\mathcal{F}'' + \frac{5}{R} \mathcal{F}' - \frac{\mathcal{J}(v)}{R^2} \mathcal{F} - 3 \tilde{S}_2 R^2 \mathcal{F} + \chi^2 \mathcal{F} = 0$$

- erhält man die Wellenfunktionen der stationären Zustände zu

$$\Psi^6 = R^Q L_n^{(Q+2)} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right) Z_v^6(\varepsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi)$$

$(L_n^{(Q+2)})$ ist ein verallgemeinertes Laguerrepolynom, v entspricht dem Paar Q und k , $\lambda = \sqrt{3 \tilde{S}_2}$.

Sie gehören zu den Energieeigenwerten

$$E_{n,Q} = \hbar \omega (2n + Q + 3) \quad \omega = \sqrt{\frac{6}{m} S_2}$$

Die radiale Quantenzahl n durchläuft die Werte

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

während

$$Q = 0, - , 2, 3, 4, \dots$$

ist(vgl. das Konstruktionsverfahren aus Teil A).

Das Spektrum zeigt die für harmonische Wechselwirkung charakteristische Äquidistanz der Energiestufen von einer Ausnahme abgesehen: das Niveau zu $Q = 1$ ($L = 1^-$) entfällt auf Grund der vorliegenden Bosesymmetrie des Systems. Die Zuordnung der Drehimpulsquantenzahl L zu den durch n und Q bestimmten Energieniveaus auf Grund der Klassifikation der hypersphärischen Funktionen aus Teil A (vgl. das dortige Beispiel) ist für die tiefsten Niveaus in Tabelle 9 angegeben.

Tabelle 9 :

n	Q	L^π
0	0	0^+
0 1	2 0	2^+ 0^+
0	3	1^- 3^-
0 1 2	4 2 0	0^+ 2^+ 4^+ 2^+ 0^+
0 1	5 3	1^- 2^- 3^- 4^- 5^- 1^- 3^-

Fortsetzung nächste Seite!

0	6	$(6^+)^2$	$(4^+)^2$	$(2^+)^2$	3^+	0^+
1	4		4^+	2^+		0^+
2	2			2^+		0^+
3	0					0^+
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	

Die in Tabelle 9 vorgenommene Klassifikation wird in Abbildung 6 graphisch veranschaulicht.

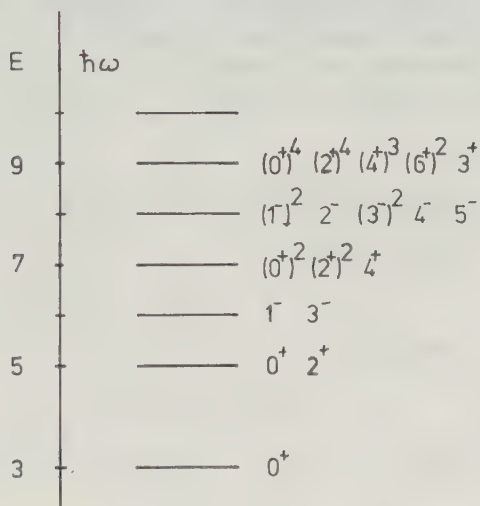


Abb. 6:

Drehimpulsklassifikation der Energieniveaus eines Dreibosonensystems mit harmonischer Wechselwirkung.

Die Zuordnung der Quantenzahlen L^π zu den einzelnen Oszillatorniveaus muß mit der Klassifikation des Spektrums dreier Bosonen in einem Oszillatorpotential übereinstimmen, wenn man mit Projektionsmethoden die Schwerpunktsbewegung eliminiert hat. Eine auf diese Weise von H.HUTZELMEYER und H.HACKENBROICH [15] vorgenommene Klassifikation zeigt bei $E = 9 \hbar \omega$ allerdings Abweichungen von unserer Klassifikation. Die Zuordnung der Quantenzahlen

$$L^\pi = 0^+ , 1^+ , 2^+ , 4^+ , 6^+$$

zu diesem Niveau unterscheidet sich von der von uns getroffenen - abgesehen von den verschiedenen Entartungsgraden - durch das Auftreten des Zustandes $L^\pi = 1^+$. Ein solcher Zustand kann nach unseren Untersuchungen frühestens bei $E = 11 \hbar \omega$ auftreten. Offenbar liegt in Bezug auf diesen Zustand in der zitierten Arbeit ein Fehler vor.

Für die tiefsten Niveaus geben wir nun noch in Tabelle 10 die vollständigen Wellenfunktionen an. Auf eine Normierung wurde dabei verzichtet.

Tabelle 10 :

$$\underline{n = 0 \quad Q = 0 \quad L = 0^+}$$

$$g(R) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right) \quad Z = D_{0,0}^0$$

$$\underline{n = 0 \quad Q = 2 \quad L = 2^+}$$

$$g(R) = R^2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$Z = \sqrt{6} \varepsilon e^{i\omega} D_{0,2}^2 + 2 D_{0,0}^2 + \sqrt{6} \varepsilon e^{-i\omega} D_{0,-2}^2$$

$$\underline{n = 0 \quad Q = 3 \quad L = 1^-}$$

$$g(R) = R^3 \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$Z = \varepsilon \left[e^{2i\omega} \sqrt{-} - e^{-i\omega} \sqrt{+} \right] D_{0,1}^1 + \varepsilon \left[e^{-2i\omega} \sqrt{-} - e^{i\omega} \sqrt{+} \right] D_{0,-1}^1$$

$$\underline{n = 0 \quad Q = 3 \quad L = 3^-}$$

$$g(R) = R^3 \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$Z = \sqrt{5} \left[(\sqrt{-})^3 e^{3i\omega} - (\sqrt{+})^3 \right] D_{0,3}^3 + \sqrt{5} \left[(\sqrt{-})^3 e^{-3i\omega} - (\sqrt{+})^3 \right] D_{0,-3}^3$$

$$+ \sqrt{3} \varepsilon \left[\sqrt{-} e^{2i\omega} - \sqrt{+} e^{-i\omega} \right] D_{0,1}^3 + \sqrt{3} \varepsilon \left[\sqrt{-} e^{-2i\omega} - \sqrt{+} e^{i\omega} \right] D_{0,-1}^3$$

$$\underline{n = 0 \quad Q = 4 \quad L = 4^+}$$

$$g(R) = R^4 \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$Z = \frac{1}{2} \varepsilon^2 e^{2i\omega} \sqrt{70} D_{0,4}^4 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 e^{-2i\omega} \sqrt{70} D_{0,-4}^4 + (2 + \varepsilon^2) D_{0,0}^4$$

$$+ \sqrt{10} \varepsilon e^{i\omega} D_{0,2}^4 + \sqrt{10} \varepsilon e^{-i\omega} D_{0,-2}^4$$

$$\underline{n = 0 \quad Q = 4 \quad L = 2^+}$$

$$g(R) = R^4 \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$Z = \sqrt{6} \varepsilon e^{i\omega} D_{0,2}^2 + (5 \varepsilon^2 - 4) D_{0,0}^2 + \sqrt{6} \varepsilon e^{-i\omega} D_{0,-2}^2$$

Als Abkürzung wurde

$$\sqrt{\pm} = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

eingeführt.

Die graphische Darstellung der Radialfunktionen $g(R)$ und der Winkelanteile $Z_{Q,\kappa}^6$ zeigen die Abbildungen 7 und 8.

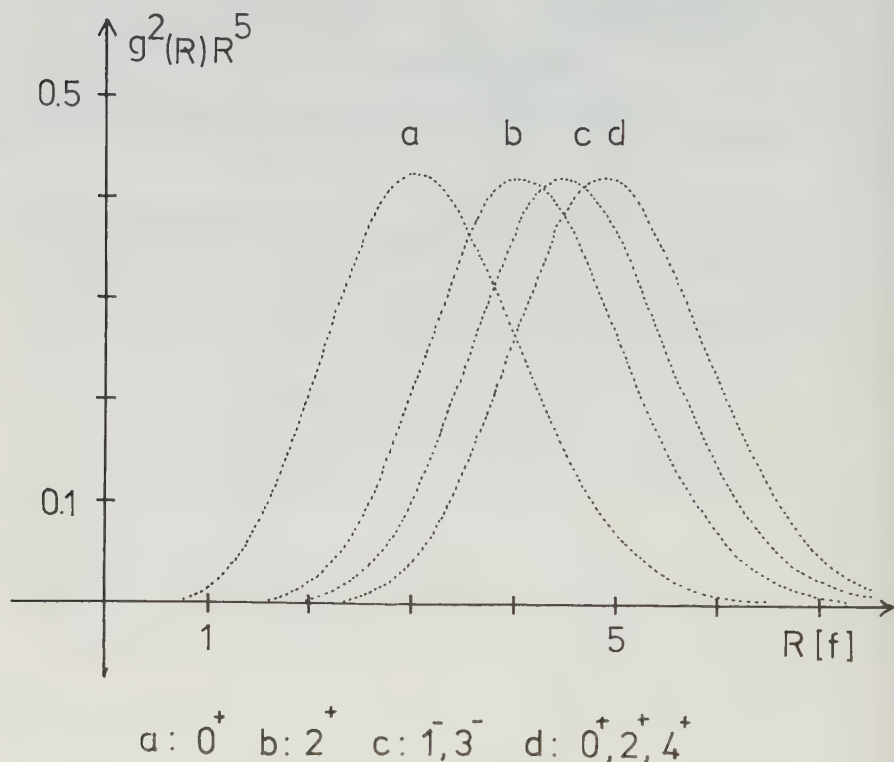


Abb. 7 :

Graphische Veranschaulichung des Betragsquadrats der Radialfunktion $g(R)$ unter Berücksichtigung des Faktors R^5 aus dem Volumenelement für $\hbar\omega = 2.84 \text{ MeV}$ und $\lambda = 0.272 \text{ f}^{-2}$ ($f: 1 \text{ Fermi}$). Die Graphen a, b, c und d entsprechen in dieser Reihenfolge den Oszillatorniveaus $3 \hbar\omega$ (Grundzustand) $5 \hbar\omega$, $6 \hbar\omega$ und $7 \hbar\omega$.

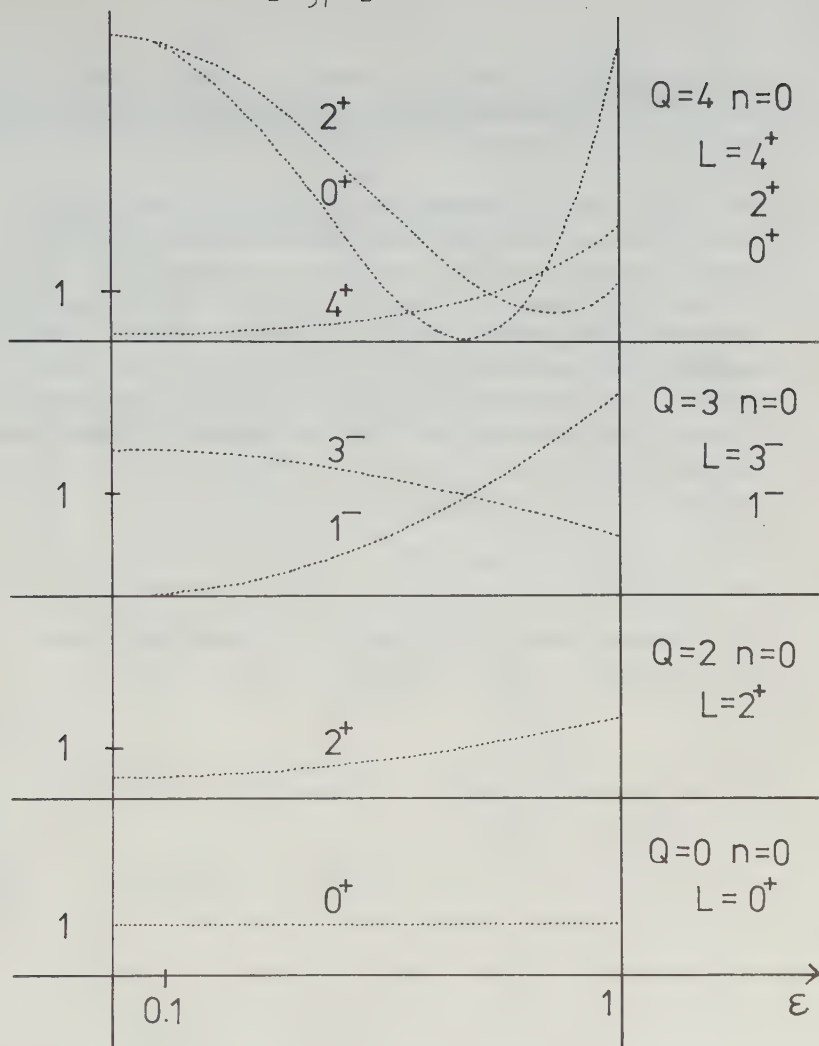


Abb. 8 :

Zur Veranschaulichung des Winkelanteils Z_v^σ wird die Abhängigkeit von $\omega, \vartheta, \varphi$ und χ durch Integration aus $Z \cdot Z^*$ herausgemittelt und die verbleibende Funktion von ϵ graphisch dargestellt. Die gezeichneten Funktionen gehören

zu den Oszillatorniveaus der Energie $3 \hbar \omega$, $5 \hbar \omega$, $6 \hbar \omega$ und $7 \hbar \omega$. Die Drehimpulsquantenzahlen sind an den einzelnen Kurven vermerkt.

Wir sehen, daß mit zunehmender Energie über dem Grundzustand eine ausgeprägte Differenzierung der Zustandsfunktionen eintritt. Wir unterscheiden Funktionen ($L^\pi = 3^-, 0^+, 2^+$ zu $Q = 3$ bzw. 4), die für $\xi \rightarrow 0$ ein ausgeprägtes Maximum besitzen und solche, die für $\xi \rightarrow 1$ ihre größten Werte annehmen ($L^\pi = 2^+, 1^-, 4^+$ zu $Q = 2, 3$ und 4). Eine ausführliche Diskussion und Interpretation dieser Zustände ist einem der folgenden Kapitel bei Anwendung unserer Modellrechnung auf den Kern ^{12}C vorbehalten.

$$b) \quad V_{ij} = S_1 r_{ij}^{-2} + S_2 r_{ij}^2$$

Wir ergänzen jetzt die harmonische Wechselwirkung durch den abstoßenden Anteil $S_1 r_{ij}^{-2}$.

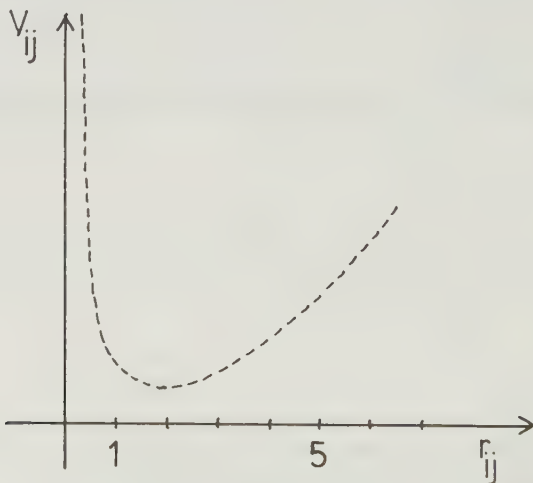


Abb. 9 :

Wechselwirkungspotential $V_{ij} = S_1 r_{ij}^{-2} + S_2 r_{ij}^2$

Durch den Zusatzterm $S_1 r_{ij}^{-2}$ wird eine Gleichgewichts-lage (Potentialminimum) bei

$$r_{ij}^0 = \sqrt[4]{\frac{S_1}{S_2}}$$

ausgezeichnet.

Da jetzt $S_1 \mathcal{M}^6$ von der Nullmatrix verschieden ist, unterscheidet sich die Transformationsmatrix $\mathcal{V}$ von der Einheitsmatrix $\mathcal{E}$. Das mit Hilfe von $\mathcal{V}$ im Raum der Spaltenvektoren $\mathcal{Q}$ entkoppelte Differentialgleichungssystem

$$\mathcal{Q}'' + \frac{5}{R} \mathcal{Q}' - \frac{\mathcal{J}_E}{R^2} \mathcal{Q} - 3 \tilde{S}_2 R^2 \mathcal{Q} + \kappa^2 \mathcal{Q} = 0$$

hat die Lösungen

$$g_f(R) = R^S L(R) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

mit

$$S = -2 + \sqrt{4 + d_r} \quad \lambda = \sqrt{3 \tilde{S}_2}$$

wobei $L(R)$ ein Laguerresches-Polynom $L^{(\alpha)}(R)$ zum Index

$$\alpha = \sqrt{4 + d_r}$$

ist. Der zugehörige Energieeigenwert hat die Form

$$E_{n,r} = \hbar \omega (2n + 1 + \sqrt{4 + d_r}) \quad \omega = \sqrt{\frac{6}{m} S_2}$$

Für den Winkelanteil der Wellenfunktion erhält man jetzt eine Überlagerung der Basisfunktionen Z_v^{ϵ} , welche durch die Elemente s_v^r der Matrix γ eindeutig bestimmt ist:

$$\sum_{v=0}^{\infty} s_v^r Z_v^{\epsilon}(\epsilon, \omega, \vartheta, \varphi, \chi)$$

Die Koeffizienten s_v^r und die Parameter $d_r(S_1 | \epsilon)$ sind numerisch durch Diagonalisieren von

$$\mathfrak{D}(v) + S_1 \mathfrak{M}$$

zu ermitteln. Da der Potentialparameter S_2 in dieses Eigenwertproblem nicht eingeht, wird die Größe von d_r und damit die relative Lage der Energieniveaus zueinander allein durch den Wert von S_1 bestimmt. Eine Variation von S_2 verändert nur die Oszillatorfrequenz ω und damit die Einheit der Energieskala.

Zur Aufstellung der Matrix $\mathfrak{M}^{\epsilon}$ sind die Matricelemente

$$\langle Z_v^{\epsilon} | \sum_{i < j=1}^3 r_{ij}^{-2} | Z_v^{\epsilon} \rangle$$

zu berechnen. Dies führt auf Integrale der Form

$$\int_0^{1+\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\gamma\omega} f(\epsilon)}{1 + \epsilon \cos \omega} \epsilon d\epsilon d\omega$$

($\gamma \geq 0$ ganzzahlig). Der Imaginärteil dieses Integrals liefert stets den Wert Null, während der Realteil auf

$$\int_0^{1+\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \gamma\omega \cdot f(\epsilon) \epsilon d\epsilon d\omega}{1 + \epsilon \cos \omega} = 2\pi \int_0^1 \frac{[1 - \epsilon^2 - 1]^{\gamma} f(\epsilon)}{\epsilon^{\gamma} \sqrt{1 - \epsilon^2}} \epsilon d\epsilon$$

führt [16], ein Integral, das geschlossen ausgewertet werden kann. $f(\epsilon)$ ist dabei das Produkt der ϵ -Polynome der Funktionen Z_v^{ϵ} und Z_v^{ϵ} .

Die numerisch ermittelten Werte für $d_r(S_1|\sigma)$ zeigt die Abbildung 10 .

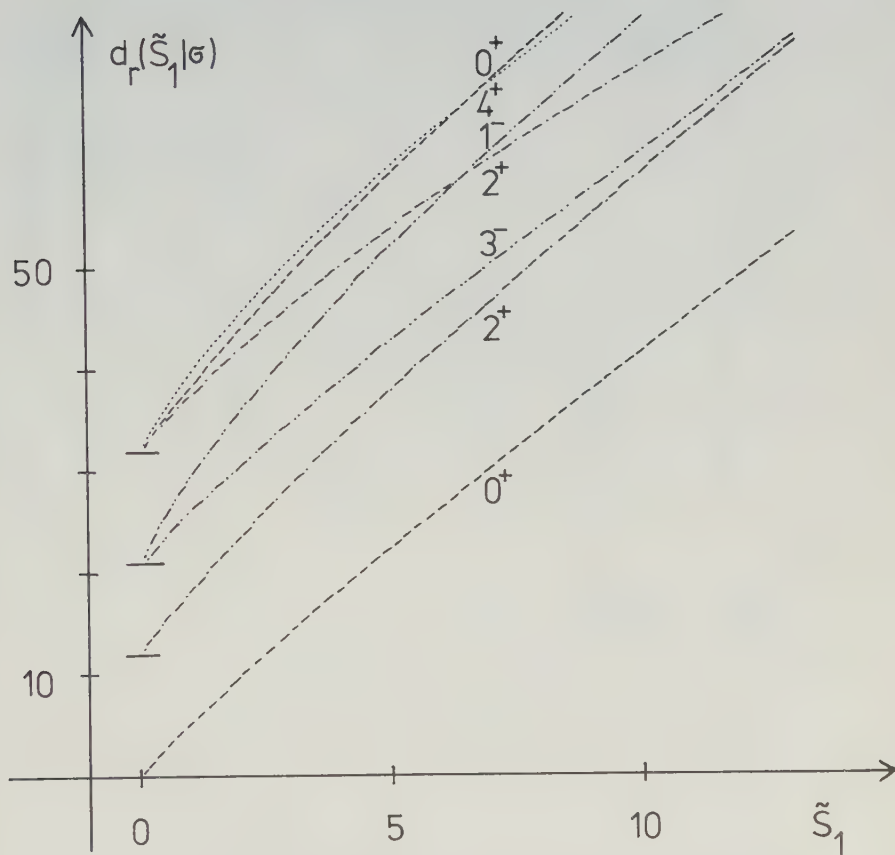


Abb. 10 :

Abhängigkeit der Parameter $d_r(S_1|\sigma)$ von der Quantenzahl L^π und vom Potentialparameter $\tilde{S}_1 = (2m/\hbar^2) S_1$.

Die Auswertung der Formel für $E_{n,r}$ mit diesen Werten von d_r ergibt dann in Abhängigkeit vom Potentialparameter S_1 die Eigenwertkurven der Abbildung 11.

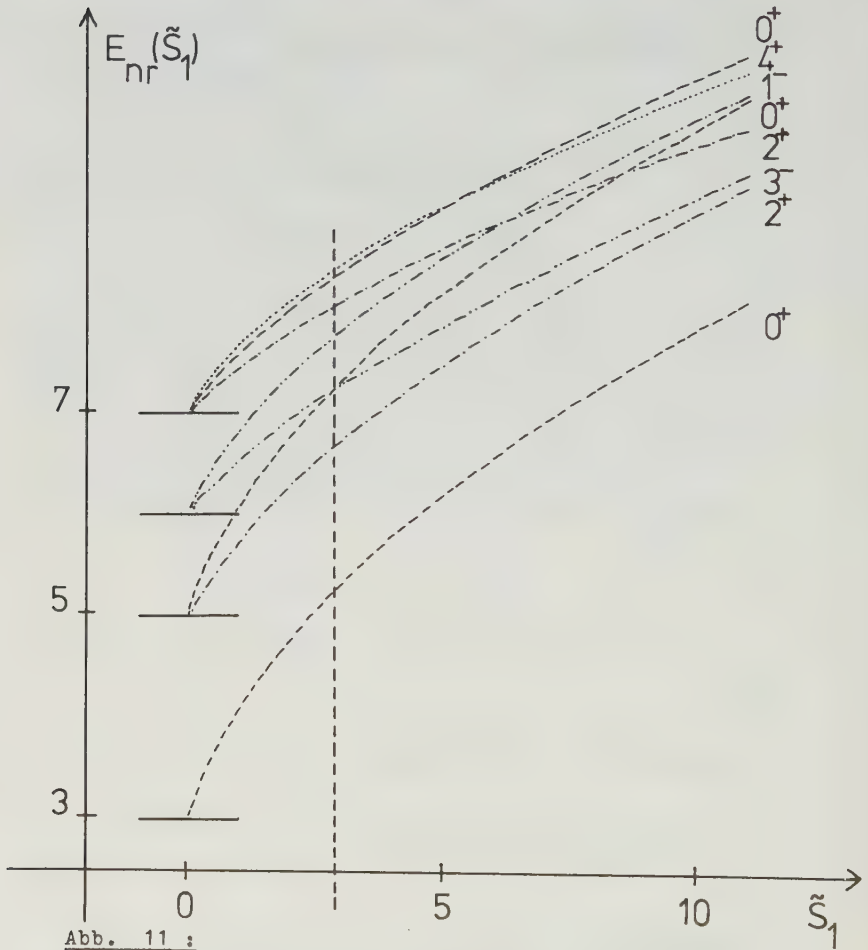


Abb. 11 :

Eigenwertkurven $E_{n,r}(\tilde{S}_1)$ als Funktionen von $\tilde{S}_1 = (2m / \hbar^2) S_1$. Die Bedeutung der senkrechten gestrichelten Linie ist im Text erläutert.

Die Überschneidung der Eigenwertkurven zu $L = 0^+$ und $L = 3^-$ bei $\tilde{S}_1 \approx 3.0$ ist durch einen senkrechten Strich markiert, da für die spätere Anwendung unsere Modellrechnung gerade die Niveaufolge in diesem Parameterbereich $0 \leq \tilde{S}_1 \leq 3$ von Bedeutung werden wird.

T E I L D

ANWENDUNG AUF DEN KOHLENSTOFF-12 - KERN

I DAS α -TEILCHENMODELL

Die grundlegende Annahme des α -Teilchenmodells besteht darin, α -Teilchen als kompakte Einheiten beim Aufbau des Gesamtkerns zu betrachten. Zu dieser Vermutung führt die besonders ausgeprägte Stabilität des freien α -Teilchens, welche durch die Tatsache erklärt werden kann, daß sich vier Nukleonen im gleichen räumlichen Zustand so anordnen, daß Spin und Isospin den Wert Null annehmen (Pauliprinzip). Als Folge hiervon hat diese Konfiguration eine große Bindungsenergie (~ 29 MeV) und keine angeregten Zustände über dem Grundzustand. Ebenfalls hohe Werte der Bindungsenergie zeigen gewisse gg-Kerne (C^{12} , O^{16} , Ne^{20} , Mg^{24} , ... : " α -Kerne") im Vergleich zu ihren nächsten Nachbarn. Diese Besonderheit steht im Zusammenhang mit der Stabilität des α -Teilchens, wenn man im Grundzustand dieser Kerne annimmt, daß sich je vier Nukleonen bevorzugt auf Grund ihrer Wechselwirkung zur Konfiguration des α -Teilchens zusammenschließen. Die so gebildeten "Cluster" müßten sich dann auf Grund des Pauliprinzip bei kleinen Abständen abstoßen, sodaß sich Zustände bestimmter räumlicher Symmetrie ausbilden können. Als Stütze dieser Modellvorstellung sei nur die Tatsache erwähnt, daß die Differenz der Gesamtbindungsenergie E_B eines α -Kerns und dem entsprechenden Vielfachen der Bindungsenergie $n E_B(\alpha)$ des α -Teilchens nahezu proportional zur Zahl der klassischen "Bindungsstriche" zwischen je zwei α -Teilchen ist (2.4 MeV pro Bindungsstrich).

Eine theoretische Berechnung der stationären Zustände dieser Kerne im Rahmen des Cluster-Modells | 17 | unter Berücksichtigung des sicher stattfindenden Austausches von Nukleonen aus verschiedenen Clustern durch vollständige und korrekte Antisymmetrisierung der Kernwellenfunktion, führt auf sehr schwierige mathematische Probleme, die in der Praxis durch Verwendung von Näherungsverfahren (Ritzsches Variationsverfahren) bewältigt werden. Der Hamilton-

operator des A-Nukleonensystems wird mit Hilfe geeignet gewählter Wellenfunktionen (Separationsansatz bezüglich innerer Struktur der Cluster und Relativbewegung der Clusterschwerpunkte) gemittelt und der Erwartungswert der Energie durch Variation freier Parameter minimalisiert. Die zur Verfügung stehenden Variationsparameter beschreiben die Größe der Cluster und bestimmte Gleichgewichtskonfigurationen der Clusterschwerpunkte | 18 |.

Wir sehen in unseren Überlegungen von derartigen Einzelheiten ab und beschränken uns auf die theoretisch einfachste Vorstellung. Wir betrachten die α - Teilchen als punktförmige Gebilde und untersuchen bei Wahl einer speziellen Wechselwirkung zwischen ihnen, welche Eigenschaften des ^{12}C - Kerns auf Grund dieser Annahmen verstanden werden können.

Als Zweiteilchenpotential nehmen wir das im Rahmen der Lösungstheorie (Kapitel C/IIb) untersuchte Potential

$$V_{ij} = S_1 r_{ij}^{-2} + S_2 r_{ij}^2$$

Dies ist für $r_{ij} \rightarrow \infty$ sicher kein realistischer Ansatz, da die $\alpha\alpha$ -Wechselwirkung nur im Bereich $0 \leq r_{ij} \leq 5 \text{ f}$ von Null verschieden sein sollte. Für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage könnte sich unser Ansatz aber durchaus bewähren, wie der Vergleich mit theoretischen und phänomenologischen Ansätzen, die in der Arbeit von S.A.AFZAL und A.A.Z.AHMAD | 19 | zu finden sind, zeigt. Jedoch betrachten wir im Gegensatz zu anderen Autoren den Potentialparameter S_1 als drehimpulsunabhängig.

II DAS NIEDERENERGETISCHE SPEKTRUM VON ^{12}C

Die im Kapitel C/III beschriebene Modellrechnung ziehen wir zu dem Versuch heran, das Spektrum von ^{12}C im Bereich von 0 bis 15 MeV theoretisch zu erklären. Die Bestwerte der bisherigen Erfahrung entnehmen wir der Arbeit von F. AJZENBERG-SELOVE | 20 |. Da das Experiment die stationären Zustände in der Reihenfolge

$$0^+ , 2^+ , 0^+ , 3^- , 0^+ , 1^- , \dots$$

festlegt, besteht für uns nur im Bereich $0 \leq \tilde{S}_1 \leq 3$ die Möglichkeit, eine Anpassung vorzunehmen, da nur für diese Werte des Parameters S_1 eine dem Experiment entsprechende Niveaufolge vorliegt. Dies zeigt die Abbildung 11, in welcher der zulässige Bereich für S_1 gekennzeichnet ist. Wir sehen weiterhin, daß für $\tilde{S}_1 \geq 3$ wegen der Absenkung des Zustandes 3^- grundsätzlich eine Niveaufolge der Form

$$0^+ , 2^+ , 3^- , 0^+ , \dots$$

vorliegt, im Widerspruch zum Experiment.

Eine Analyse der Spektren im zulässigen Bereich für S_1 zeigt nun, daß für $\tilde{S}_1 \cong 1.0$ (d.h.: $S_1 = 5.22 \text{ MeV f}^2$) bei Wahl von $S_2 = 0.245 \text{ MeV f}^{-2}$ eine gute Anpassung der theoretischen Niveaufolge an das Experiment möglich wird (Tabelle 11).

Tabelle 11:

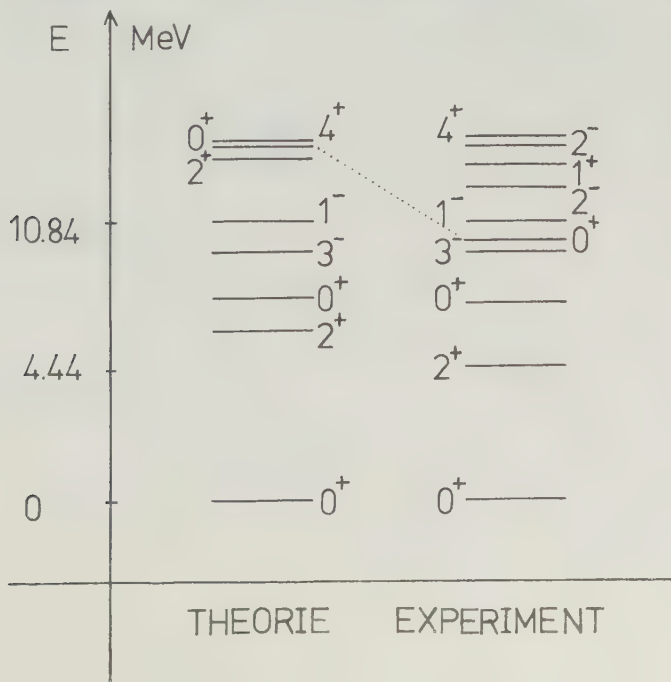
THEORIE		EXPERIMENT	
L^π	E (MeV)	L^π	E (MeV)
0^+	0	0^+	0
2^+	6.557	2^+	4.4392

		- 67 -		
0^+	7.836		0^+	7.653
3^-	9.626		3^-	9.638
0^+	13.678		(0^+)	10.3
1^-	10.844		1^-	10.844
			2^-	11.828
			1^+	12.713
			(2^-)	13.352
2^+	13.243			
4^+	13.871		4^+	14.08

Einen Überblick in Form einer Gegenüberstellung des theoretischen und des experimentellen Spektrums zeigt Abbildung 12.

Abb. 12 :

Experimentelle und theoretische Niveaufolge des ^{12}C - Kerns.



Ein erster Vergleich zeigt, daß von den neun experimentellen Niveaus über dem Grundzustand 0^+ vier nahezu richtig wiedergegeben werden. Es sind dies die Zustände

$$0^+/7.7 \text{ MeV} \quad 3^-/9.6 \text{ MeV} \quad 1^-/10.8 \text{ MeV} \quad 4^+/14.08 \text{ MeV}$$

die (bezogen auf die experimentellen Zahlenwerte) mit einem Fehler von etwa 1% behaftet sind.

Neben diesen sehr gut wiedergegebenen Zuständen finden wir noch einen 2^+ -Zustand, der zwar im richtigen Bereich des Spektrums erscheint (zwischen dem Grundzustand und dem Zustand 0^+ bei 7.7 MeV), im Vergleich zum experimentellen Wert von 4.44 MeV aber einen Fehler von ungefähr 48 % aufweist. Eine detaillierte Diskussion der bis jetzt erwähnten Zustände verschieben wir in das nächste Kapitel.

Mit einem ähnlich großen Fehler (ungefähr 33 %) erscheint auch der 0^+ - Zustand, der dem experimentellen Niveau bei 10.3 MeV entsprechen sollte, in unseren Rechnungen.

Nun noch eine Bemerkung zu den experimentell gesicherten Zuständen verkehrter Parität 2^- bei 11.8 MeV und 1^+ bei 13.4 MeV . Sie können durch unsere Rechnungen quantitativ nicht erklärt werden. Da sie auf Grund der Bosesymmetrie bereits im Oszillator zu hoch liegen ($E_{Oz} \geq 8 \hbar \omega$) würden sie bei unserer Anpassung im Spektrum bei Energiewerten weit über 14 MeV erscheinen. Dies deutet eine Grenze unserer Modellvorstellungen an, da Schalenmodellrechnungen von COHEN-KURATH | 21 | zumindest den 1^+ - Zustand quantitativ richtig wiedergeben. Es ist anzunehmen, daß ab hier 1 Teilchen-1 Loch Anregungen der α -Cluster in die Betrachtungen mit einbezogen werden müssen.

Den (2^-) - Zustand bei 13.35 MeV , der experimentell nicht gesichert ist, was die Zuordnung der Quantenzahl 2^- betrifft, könnten wir dagegen mit dem aus unseren Rechnungen folgenden 2^+ - Zustand bei 13.2 MeV identifizieren.

Das Ergebnis der experimentellen Arbeit von M.A.FAWZI | 22 |, durch welches der 4^+ - Zustand von 14.1 MeV auf 15.3 MeV

angehoben wird, soll angesichts der noch vorhandenen Unsicherheit außer Betracht bleiben.

Der Vergleich mit anderen theoretischen Untersuchungen fällt, wie die Abbildung 13 zeigt, zu unseren Gunsten aus.

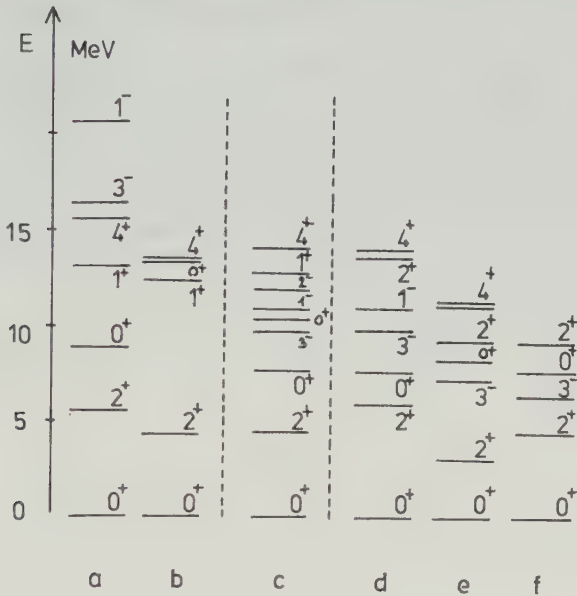


Abb. 13 :

Modellrechnungen von

- a) Hutzelmeyer/Hackenbroich
- b) Cohen/Kurath
- e) Weiguny

Experimentelle Niveaufolge (c) und zwei Spektren unserer Arbeit mit den Parametern

- d) $S_1 = 5,22 \text{ MeV } f^2$
- f) $S_1 = 31,3 \text{ MeV } f^2$

Ein von W.ZICKENDRAHT | 23 | berechnetes Spektrum wurde in die Abbildung nicht aufgenommen, da nach unserer Ansicht mit falsch symmetrisierten Wellenfunktionen gerechnet wurde.

Ebenfalls nicht berücksichtigt wurden die Arbeiten von N.TAKIGAWA | 24 | und N.De TAKACSY | 25 |, da sie Ergebnisse liefern, die denen von Weiguny et al. ähnlich sind.

Die meisten Schwierigkeiten bereiten den anderen Autoren die Zustände negativer Parität 3^- und 1^- . Besonders kraß zum Ausdruck kommt dies in Spektrum (a), welches diese beiden Niveaus, trotz vernünftiger Werte für die Zustände positiver Parität, völlig verkehrt wiedergibt, da sie bei Energien über 16 MeV zu liegen kommen (experimentelle Werte unter 11 MeV).

Für das Spektrum (e) dagegen ist die Niveaufolge 0^+ , 2^+ , 3^- , 0^+ , 2^+ charakteristisch. Unsere Modellrechnung liefert ein Spektrum ähnlicher Art, wenn für den Potentialparameter S_1 der Wert

$$S_1 = 31.3 \text{ MeV } f^2$$

gewählt wird. Eine Erklärung dieses Sachverhalts geben wir im nächsten Kapitel.

Auffällig ist weiterhin, daß die bei uns vorhandene Diskrepanz in Bezug auf den (0^+) - Zustand bei 10.3 MeV in allen anderen Arbeiten auftritt.

Neben der guten Anpassung der Niveaufolge an das Experiment erhalten wir aus den Parametern S_1 und S_2 eine Information über unser Modellpotential. Berechnen wir nämlich den Gleichgewichtsabstand (d.h. das Potentialminimum) von zwei α -Teilchen, so ergibt sich

$$|\vec{r}_{1j}^0| = \sqrt[4]{\frac{S_1}{S_2}} \sim 2.1 \text{ f}$$

Da für diesen Wert von $|\vec{r}_{ij}|$ der "hard-core" in den anziehenden Anteil des Potentials übergeht, haben wir eine Reichweite der Abstoßung in Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung. Unser Ansatz ist demnach für kleine r_{ij} durchaus brauchbar.

III DIE WELLENFUNKTIONEN DER STATIONÄREN ZUSTÄNDE

Eine Analyse der numerisch berechneten Entwicklungskoeffizienten s_v^r für $S_1 = 5.22 \text{ MeV f}^2$ zeigt, daß für die tiefsten Niveaus von ^{12}C in der Entwicklung des Winkelanteils nach hypersphärischen Funktionen Z_v^6

$$\sum_{v=0} s_v^r Z_v^6(\epsilon, \omega, \mathfrak{z}, \varphi, \chi)$$

der Koeffizient s_0^0 dominiert, der dem Oszillatorniveau entspricht, welches stetig in den betreffenden ^{12}C - Zustand verschoben wird. Es zeigt sich, daß das Betragsquadrat von s_0^0 für die tiefsten stationären Zustände von ^{12}C einen Wert im Bereich

$$0.93 \leq |s_0^0|^2 \leq 0.97$$

hat. Dies bedeutet, daß die zugehörige hypersphärische Funktion die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu über 90% bestimmt. In guter Näherung sind demnach die ^{12}C - Zustände durch die Winkelanteile der Oszillatorfunktionen beschreibbar, da diese ja mit den hypersphärischen Funktionen übereinstimmen. (vgl. dazu Abb. 8).

Verändert werden dagegen die Radialfunktionen $g(R)$, welche im Vergleich zum Oszillator etwas vergrößerte Exponenten s im Anteil R^s bekommt (Tabelle 12). Die drehimpulsabhängige Vergrößerung von s hebt die im Oszillator vorliegende Entartung auf.

Tabelle 12: Radialfunktionen für $S_1 = 5.22 \text{ MeV f}^2$.

$n = 0 \mid 0^+$

$$g(R) = R^{1.053} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$\underline{n = 0 \mid 2^+}$$

$$g(R) = R^{2.726} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$\underline{n = 0 \mid 3^-}$$

$$g(R) = R^{3.51} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$\underline{n = 0 \mid 1^-}$$

$$g(R) = R^{3.821} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

$$\underline{n = 0 \mid 4^+}$$

$$g(R) = R^{4.593} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} R^2\right)$$

Die graphische Darstellung der Funktionen $g(R)$ zeigt die Abbildung 14.

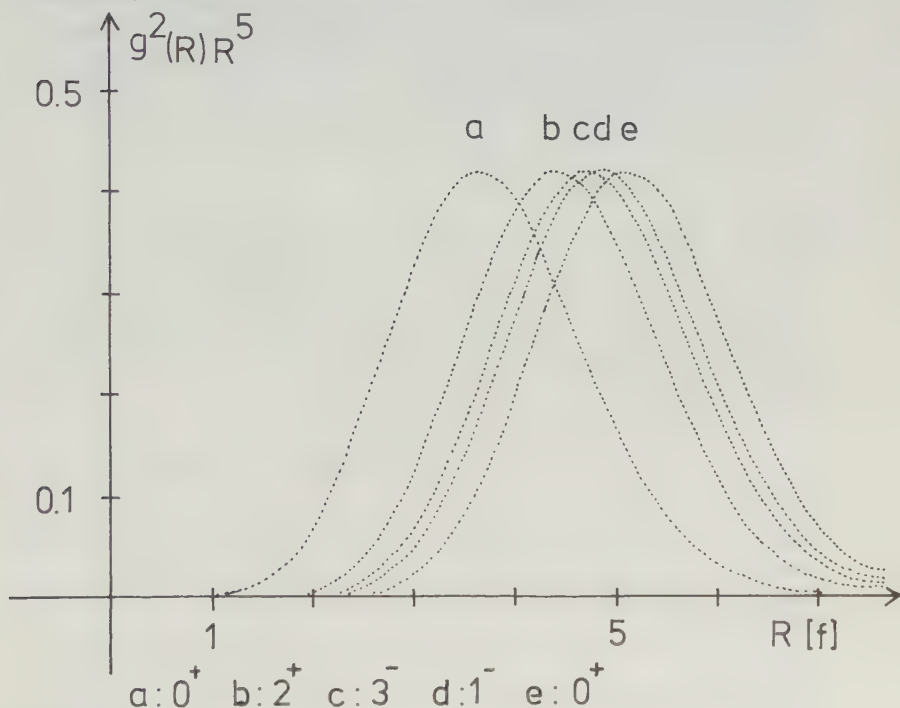


Abb. 14:

Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Radialfunktionen $g(R)$ der ^{12}C -Zustände unter Berücksichtigung des Faktors R^5 vom Volumenelement für $\lambda = 0.375 \text{ f}^{-2}$.

Wenden wir uns nun den Winkelanteilen zu (vgl. Abb. 8). An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, daß sich die Bezeichnungsweise "Winkelanteil" auf den 6-dimensionalen Konfigurationsraum bezieht. Im Ortsraum sind nur die Variablen ϑ, φ, χ Winkel im üblichen Sinn. Es soll eine Interpretation auf zweifache Art vorgenommen werden und zwar hinsichtlich ihres Aussagegehaltes bezüglich der a) geometrischen Struktur und der b) kinematischen Eigenschaften der Zustände, die sie beschreiben.

a) Geometrische Struktur

Wie wir bereits gesehen haben (Teil C/Abb.8), unterscheiden sich die Winkelanteile in ihrer ε -Abhängigkeit durch das Auftreten maximaler Funktionswerte bei $\varepsilon = 0$ bzw. $\varepsilon = 1$. Diese Tatsache können wir dazu benutzen, die geometrische Struktur der Zustände etwas aufzuhellen, da wir ja wissen, welche Bedeutung der Variablen ε zukommt. Der Zusammenhang mit der reduzierten Fläche

$$F_0 \sim \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

zeigt, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Fläche der Konfiguration maximal wird, während sie für $\varepsilon \rightarrow 1$ verschwindet. Das heißt, daß $\varepsilon = 1$ der Anordnung der drei Teilchen in Form einer linearen Kette entspricht und $\varepsilon = 0$ der Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks zuzuordnen ist. Die Zustände

$$2^+ / 4.44 \text{ MeV} \quad 1^- / 10.8 \text{ MeV} \quad 4^+ / 14.1 \text{ MeV}$$

sollten demnach überwiegend gestreckte Anordnungen beschreiben, während für den Zustand $3^- / 9.6 \text{ MeV}$ das gleichseitige Dreieck in Frage kommt.

Diese Vorstellung wollen wir durch zwei Überlegungen stützen.

Zuerst berechnen wir die Erwartungswerte der reduzierten Fläche F_0 in diesen Zuständen:

$$\bar{F}_0 = \int \sqrt{1 - \varepsilon^2} Z_V^{G*} Z_V^G \varepsilon d\varepsilon d\omega \sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\chi$$

Die Werte für $\bar{F}_0$ sind in Abbildung 15 in der rechten Spalte eingetragen.

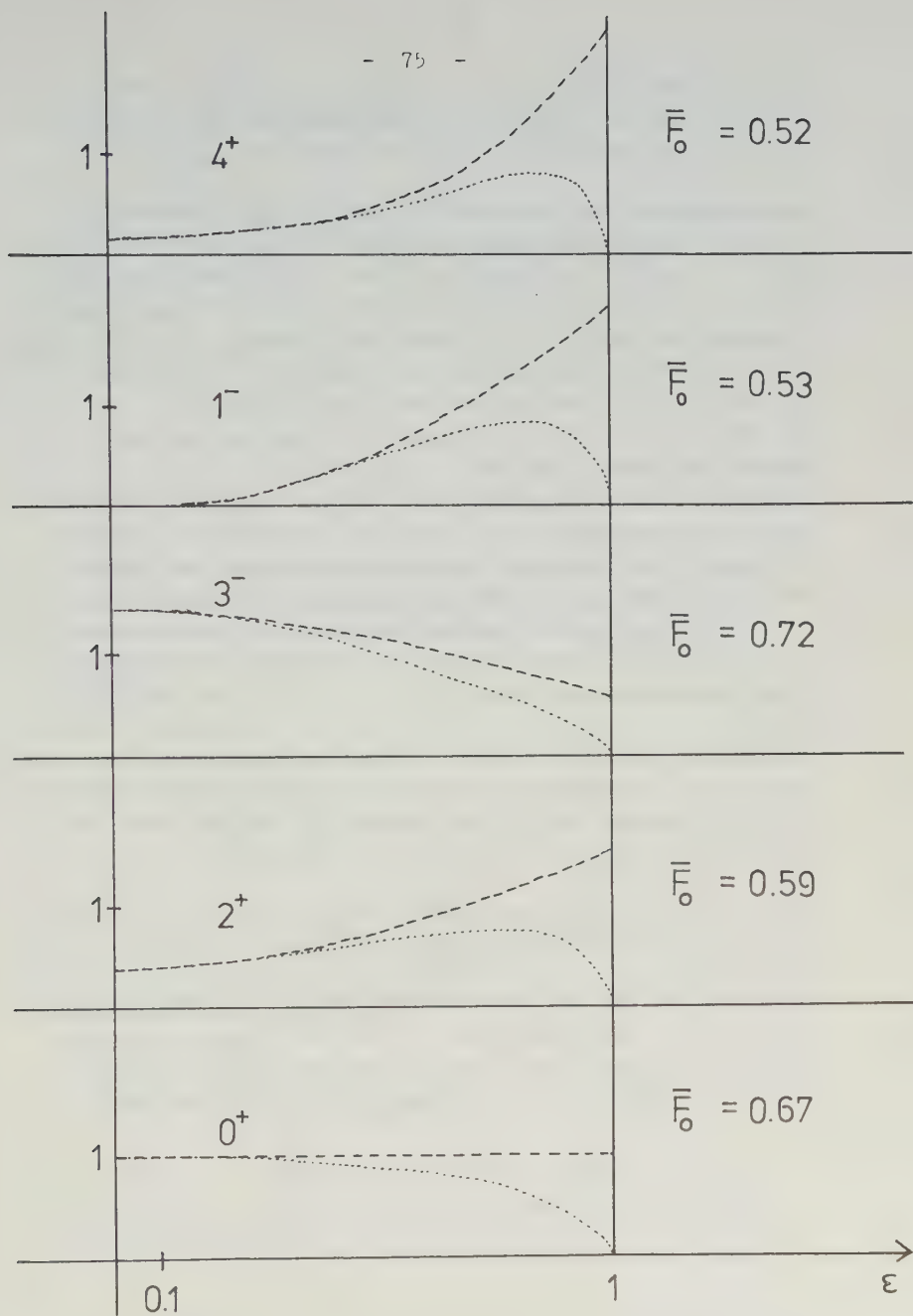


Abb. 15 :

ϵ - Abhängigkeit des Winkelanteils nach Mittelung über ω ,

$\mathfrak{J}, \varphi, \chi$ (gestrichelt) sowie die mit F_0 multiplizierten Wahrscheinlichkeitsdichten (punktiert). Die Zahlenwerte in der rechten Spalte sind die Erwartungswerte $\bar{F}_0$.

Beim Vergleich der Erwartungswerte von F_0 beziehen wir uns auf den Zustand kleinster Fläche $4^+ / 14 \text{ MeV}$ mit $\bar{F}_0(4^+) = 0.52$. Es zeigt sich, daß $\bar{F}_0(3^-)$ um nahezu 38 % größer ist. Für diese beiden Zustände sollten unsere Überlegungen am besten erfüllt sein. Der Zustand 4^+ beschreibt also eine stark gestreckte, der Zustand 3^- eine nahezu gleichseitig-dreieckige Anordnung der Teilchen. Da $\bar{F}_0(1^-) \approx \bar{F}_0(4^+)$ ist, entspricht auch der Zustand 1^- einer gestreckten Anordnung.

Eine Zwischenstellung nimmt der Zustand $2^+ / 4.44 \text{ MeV}$ ein. Dies sieht man daran, daß $\bar{F}_0(2^+)$ um etwa 15 % größer ist als $\bar{F}_0(4^+)$. Einen Hinweis hierauf konnte man bereits der Wahrscheinlichkeitsverteilung entnehmen, welche zwar für $\varepsilon \rightarrow 1$ ebenfalls maximal wird, im Gegensatz zu der der Zustände 1^- und 4^+ aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht vernachlässigbare Werte aufweist.

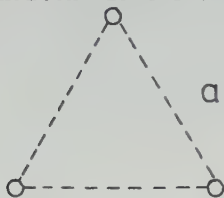
Die zweite Überlegung beruht auf einem klassischen Vergleich der potentiellen Energien von gleichseitigem Dreieck und linearer Kette. Dazu nehmen wir an, daß beide Anordnungen gleich groß sind. Dies hat zur Folge, daß

$$R^2 = \frac{1}{3} \sum_{i < j=1}^3 (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$$

in beiden Fällen den gleichen Wert haben muß. Wählen wir für das Dreieck die Kantenlänge a , so muß demnach in der linearen Kette der Abstand zweier benachbarter α -Teilchen $a / \sqrt{2}$ sein. Unter Verwendung des Zweiteilchenpotentials

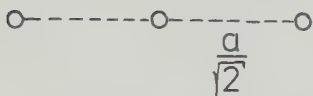
$$V_{ij} = S_1 r_{ij}^{-2} + S_2 r_{ij}^2$$

erhalten wir für das gleichseitige Dreieck



$$V_{\Delta} = 3 \frac{S_1}{a^2} + 3 S_2 a^2$$

und für die Kette



$$V_K = \frac{9}{2} \frac{S_1}{a^2} + 3 S_2 a^2$$

Wir sehen, daß die Unterschiede der Werte für die gesamte potentielle Energie allein durch den Abstoßungsterm $S_1 r_{ij}^{-2}$ hervorgerufen werden. Das ist günstig, da der zweite Term für die Außenteilchen des gestreckten Zustandes sicherlich keinen guten Ansatz mehr darstellt. Der Unterschied der potentiellen Energien läßt sich zahlenmäßig durch das Verhältnis der "hard-core" - Anteile $V_{\Delta}^{hc} = 3 S_1/a^2$ und $V_K^{hc} = 4,5 S_1/a^2$ ausdrücken

$$\frac{V_K^{hc}}{V_{\Delta}^{hc}} = 3 / 2$$

Diesen Zahlenwert sollten wir wenigstens näherungsweise unter Verwendung der quantenmechanischen Erwartungswerte für die von der Größe des Systems unabhängige reduzierte potentielle Energie des "hard-cores"

$$V_0^{hc} = S_1 R^2 \sum_{i < j=1}^3 r_{ij}^{-2} = S_1 I(\epsilon, \omega)$$

wiederfinden. Der Wert von V_0^{hc} ist auf Grund der Abhängigkeit von ϵ und ω nur durch die Art der Anordnung der Teilchen bestimmt.

Wir vergleichen mit Hilfe der Matricelemente

$$\bar{V}_0^{hc}(\bar{\sigma}) = \langle z_v | \bar{V}_0^{hc} | z_v \rangle$$

den Wert der potentiellen Energie des hard-cores im Zustand 3^- (dieser Zustand sollte der Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks am nächsten kommen) mit den Werten von $\bar{V}_0^{hc}$ in den Zuständen 2^+ , 1^- und 4^+ . Wir erhalten

$$\frac{\bar{V}_0^{hc}(2^+)}{\bar{V}_0^{hc}(3^-)} = 1.2$$

$$\frac{\bar{V}_0^{hc}(1^-)}{\bar{V}_0^{hc}(3^-)} = 1.8$$

$$\frac{\bar{V}_0^{hc}(4^+)}{\bar{V}_0^{hc}(3^-)} = 1.41$$

im Mittel also 1.47, in guter Übereinstimmung mit dem klassischen Wert 1.5. Dies zeigt erneut, daß der Zustand 3^- im Gegensatz zu 2^+ , 1^- und 4^+ einer dreieckigen Anordnung entspricht.

b) Kinematische Eigenschaften

Als nächstes beschäftigen wir uns mit den kinematischen Eigenschaften der Zustände.

Dazu untersuchen wir in einer Vorüberlegung zunächst das Spektrum eines gleichseitigen starren Dreiecks (symmetrischer Kreisel). Der zugehörige Hamiltonoperator ist

$$H = \frac{1}{2\Theta_0} \left(L^2 - \frac{1}{2} L_3^2 \right) \quad \frac{1}{\Theta_0} = \frac{1}{m R_0^2}$$

Mit unseren Auswahlregeln $N = 3w$ ($w = 0, 1, 2, \dots$) für die Projektionsquantenzahl N der Wellenfunktion $D_{M,N}^L$ erhält man für die Eigenwerte und Eigenfunktionen der tiefsten Zustände folgende Möglichkeiten.

Tabelle 13 :

L^π	N	Eigenfunktion
0^+	0	$D_{0,0}^0$
2^+	0	$D_{0,0}^2$
3^-	± 3	$D_{0,+3}^3 + D_{0,-3}^3$
4^+	0	$D_{0,0}^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die Energiestufen für diesen Grenzfall sind in Abbildung 16 dargestellt.

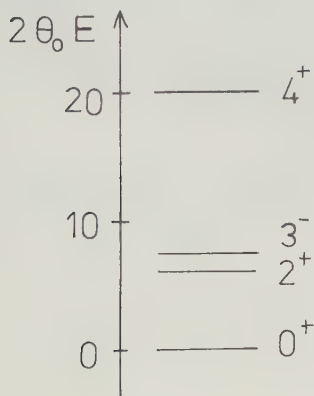


Abb. 16 :

Energiestufen eines gleichseitigen starren Dreiecks unter Berücksichtigung der Auswahlregeln für Bosesymmetrie.

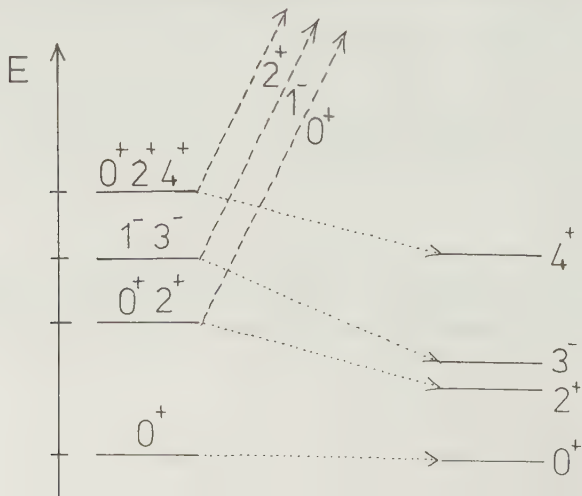
Kehren wir jetzt kurz zur Abbildung 14 zurück. Wir hatten dort auf die Ähnlichkeit der Spektren e (Weiguny) und f (unsere Rechnung für $S_1 = 31.3 \text{ MeV } f^2$) hingewiesen, welche wir nun verstehen können, wenn wir das Spektrum des starren gleichseitigen Dreiecks zum Vergleich heranziehen. Eine Vergrößerung von S_1 bedeutet eine stärkere Auszeichnung der Gleichgewichtslage des Systems und bewirkt eine Annäherung an den Grenzfall des starren Körpers. Daraus folgt, daß in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der einzelnen Zustände die Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks überwiegen muß. Dies ist aber gerade die Annahme von Weiguny, daß die Clusterschwerpunkte ein Dreieck bilden. Als Konsequenz hiervon ergibt sich die Niveaufolge $0^+, 2^+, 3^-, 0^+, \dots$, die sich, wie man sich an Hand der Abbildung 10 a überzeugen kann, in unseren Rechnungen durch Absenkung des 3^- - Zustandes ausbildet. Da die experimentelle Niveaufolge aber bei viel kleineren Werten von S_1 zustande kommt, müssen wir folgern, daß der ^{12}C - Kern ein ziemlich weiches Gebilde ist.

Nach diesem Einschub wenden wir uns wieder den kinematischen Eigenschaften der Drehimpulszustände zu.

Die Zustände $2^+, 3^-$ und 4^+ des Oszillators werden beim Grenzübergang zum starren Dreieck stetig in die Niveaus dieses Gebildes übergehen. (Abbildung 17).

Abb. 17 :

Übergang vom harmonischen Oszillator zum starren Dreieck.



Da die Zustände des starren Dreiecks rein kollektiver Natur, d.h. unabhängig von der inneren Bewegung des Systems sind, sollte diese Eigenschaft in den Zuständen von ^{12}C zumindest angedeutet sein. Wir erwarten, in den Wellenfunktionen der Zustände 2^+ und 4^+ Anteile vorzufinden, welche von der inneren Bewegung unabhängig sind und Rotationen um eine Achse in der Dreiecksfläche beschreiben, in Anlehnung an die Wellenfunktionen im starren Grenzfall (vgl. Tabelle 13). Für den 3^- - Zustand sollte dieser Anteil einer Rotation um die Flächennormale entsprechen. Zur mathematischen Untersuchung dieser Eigenschaften greifen wir auf die Definition kollektiver Zustände nach H.RUDER [4, 12] zurück.

Wenn man die drehimpulsfreien Zustände ψ_v^0 zu $L = 0^+$ der durch den Hamiltonoperator H_1 beschriebenen inneren Bewegung

$$H_1 \psi_v^0 = E_v^1 \psi_v^0$$

kennt, so kann die Wellenfunktion eines Zustandes zu $L \neq 0$, welche die prinzipielle Form

$$\psi^L = g^L(R) \sum_{N=-L}^{+L} \psi_N^L(\varepsilon, \omega) D_{0,N}^L(\vartheta, \varphi, \chi)$$

hat, nach dem vollständigen Satz der ψ_v^0 entwickelt werden. Da in unserem Fall

$$\psi_v^0 = g_v^0(R) \phi_v^0(\varepsilon, \omega)$$

ist, erhält man für die Entwicklung

$$\psi^L = g^L(R) \sum_{v=0}^{\infty} \phi_v^0(\varepsilon, \omega) \sum_{N=-L}^{+L} c_0^{L,N} D_{0,N}^L(\vartheta, \varphi, \chi)$$

Nach Ruder liegt ein kollektiver Zustand vor, der sich auf dem Grundzustand ϕ_0^0 aufbaut, wenn sich in der Funktion

$$\begin{aligned} \psi^L &= \left\{ \phi_0^0 \sum_{N=-L}^{+L} c_0^{L,N} D_{0,N}^L + \sum_{v \neq 0}^{\infty} \phi_v^0 \sum_{N=-L}^{+L} c_v^{L,N} D_{0,N}^L \right\} \cdot g^L(R) \\ &= \psi_{\text{koll}} + \psi_S \end{aligned}$$

die "Störung" ψ_S gegenüber dem kollektiven Anteil ψ_{koll} vernachlässigen läßt.

Für die Zustände 2^+ , 3^- und 4^+ finden wir mit dieser Entwicklung die kollektiven Anteile (abgesehen von Faktoren)

$$\begin{aligned} 2^+ &: \psi_{\text{koll}} \sim D_{0,2}^2 \\ 3^- &: \psi_{\text{koll}} \sim D_{0,-3}^3 + D_{0,3}^3 \\ 4^+ &: \psi_{\text{koll}} \sim D_{0,0}^4 \end{aligned}$$

Jedoch ist in diesen Zuständen grundsätzlich die "Störung" ψ_S nicht zu vernachlässigen. Dies sieht man beispielsweise am 2^+ - Zustand, der unter Verwendung der Funktionen ϕ_v^0 in die Form

$$\psi^{2^+} = g^{2^+}(R) \left\{ \sqrt{\frac{4}{10}} \phi_0^0 D_{0,0}^2 + \sqrt{\frac{3}{10}} (\phi_1^0 D_{0,2}^2 + \phi_1^{0*} D_{0,-2}^2) \right\}$$

gebracht werden kann. Das Verhältnis der Betragsquadrate von $C_{0,0}^{2,0}$ und $C_{1,2}^{2,2}$ ist demnach

$$\frac{|C_{0,0}^{2,0}|^2}{|C_{1,2}^{2,2}|^2} = \frac{4}{3}$$

und zeigt, daß auf Grund der Weichheit des Systems der Grundzustand bei Rotation erheblich verändert wird.

Beim Grenzübergang zum starren Körper müssen sich die Wellenfunktionen ψ^L dahingehend ändern, daß der kollektive Anteil ψ_{koll} immer mehr Gewicht bekommt, bis schließlich die Störung ψ_S vernachlässigt werden kann.

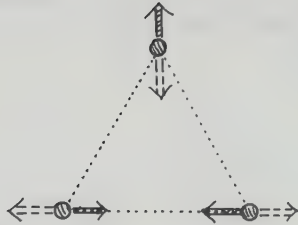
Wenden wir diese Überlegungen noch auf den Zustand 1^- an, so finden wir, daß er keinen kollektiven Anteil enthält. Dies entspricht der Tatsache, daß wir diesen Zustand nicht im Spektrum des starren Dreiecks finden. Der Grund hierfür ist durch die Bosesymmetrie unseres Systems bedingt, welche eine ganz bestimmte Kombination der Faktoren $e^{i\chi}$ und $e^{i\omega}$ in der Wellenfunktion verlangt.

Die durch die Wellenfunktion

$$\psi^{1-} = f(R, \varepsilon, \omega) D_{0,1}^1 + f^*(R, \varepsilon, \omega) D_{0,-1}^1$$

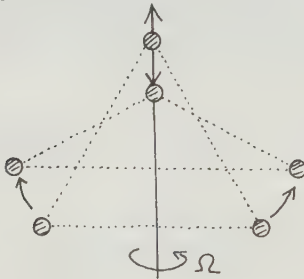
beschriebene Rotation um die Flächennormale ist stets untrennbar mit inneren Schwingungen verknüpft, welche durch die ω -Abhängigkeit von f beschrieben werden.

In der Diplomarbeit von H.HEROLD [26] wurde für den Fall kleiner Schwingungen der 3 Teilchen um die Gleichgewichtskonfiguration des gleichseitigen Dreiecks gezeigt, daß dieser Zustand einer Normalschwingung entspricht, welche den Umfang der Anordnung konstant läßt. Dies entspricht einem Schwingungstyp der Form



Diese Interpretation des Zustandes 1^- kann nicht zur Deutung des Zustandes 1^- im ^{12}C - Kern bei unsere Anpassung übernommen werden, da in unserem Fall eine stark gestreckte Anordnung der Teilchen vorliegt (vgl. Abb. 15). Die Klassifikation nach Normalschwingungen bezieht sich in der zitierten Arbeit aber stets auf das gleichseitige Dreieck.

Zum Abschluß noch eine Bemerkung zur Wirkung der kollektiven Anteile. Dazu betrachten wir 3 Teilchen, deren Wechselwirkung durch Federn realisiert wird.



Wird dieses System um eine Achse in der Ebene der 3 Teilchen mit der Winkelgeschwindigkeit Ω in Rotation versetzt (dies entspräche der Wirkung der kollektiven Anteile der Zustände 2^+ und 4^+), so bildet sich eine mehr gestreckte Anordnung ("Zentrifugalstreckung"). Dies bestätigt unsere früheren Überlegungen, welche die kleinen Werte der reduzierten Fläche F_0 in diesen Zuständen betrifft.

IV DER KERNRADIUS

Wir definieren den Radius von ^{12}C im Rahmen unseres Modells durch den Erwartungswert im Grundzustand

$$r_M = \sqrt{\langle \vec{r}_{S\alpha}^2 \rangle}$$

wobei $|\vec{r}_{S\alpha}|$ der Abstand des punktförmigen α - Teilchens vom Schwerpunkt S des Gesamtsystems ist. Die Berechnung des Mittelwertes führt auf das Integral

$$\langle \vec{r}_{S\alpha}^2 \rangle = \frac{1}{3} \int R^2 (1 - \epsilon \cos \omega) g_0^2 Z_0 d\tau$$

dessen Auswertung unter Verwendung der Grundzustandswellenfunktion den Zusammenhang

$$\langle \vec{r}_{S\alpha}^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{1}{\lambda} (1 + \sqrt{4 + d_0})$$

liefert. Mit

$$d_0 = 5.33 \quad \lambda = 0.375 f^{-2}$$

erhalten wir

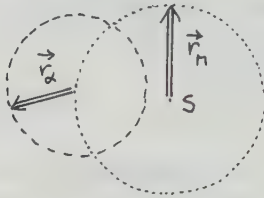
$$r_M = 1.9 f$$

Denken wir uns den ^{12}C -Kern aus α -Teilchen der Eigengröße

$$r_\alpha = 1.63 f$$

aufgebaut, so ist der Modellradius r_M als Abstand des

Mittelpunktes des α -Teilchens vom Schwerpunkt S des Gesamtsystems zu interpretieren.



Durch Mittelung der Vektorsumme $\vec{r}_M + \vec{r}_\alpha$ erhalten wir dann für den Kernradius R den Wert

$$R = \sqrt{\langle (\vec{r}_M + \vec{r}_\alpha)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \vec{r}_M^2 \rangle + \langle \vec{r}_\alpha^2 \rangle}$$

$$\approx 2.5 \text{ f}$$

Die Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert

$$R_e = 2.4 \text{ f}$$

ist gut. Dies spricht ebenfalls für unsere Modellvorstellung.

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurde eine spezielle Lösungsmethode für das quantenmechanische Dreikörperproblem entwickelt. Da nur die Relativbewegung des Systems physikalisch interessant ist, wurde durch Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten die Bewegung des Massenmittelpunktes absepariert. Durch spezielle Wahl von Jacobi-Vektoren für die Relativkoordinaten konnte erreicht werden, daß sich der kinetische Anteil des Hamiltonoperators der drei Teilchen durch den sechsdimensionalen Laplace-Operator ausdrücken ließ. Das Lösungsverfahren besteht nun darin, die Wellenfunktion des Systems nach einem ganz bestimmten orthonormierten Funktionensatz (hypersphärische Funktionen) zu entwickeln. Diese Funktionen haben die Eigenschaft, die sechsdimensionale Laplace-Gleichung zu lösen. Sie sind weiterhin nach allen Symmetrien des Hamiltonoperators (Rotationssymmetrie, Permutationssymmetrie, Parität) klassifiziert und können durch Wahl geeigneter innerer Koordinaten und Eulerscher Winkel an Stelle der Jacobi-Koordinaten in eine praktisch zu handhabende Form gebracht werden. Für ein speziell gewähltes Zweiteilchenpotential $V_{ij} = S_1 r_{ij}^{-2} + S_2 r_{ij}^2$ zwischen den Systembestandteilen konnten analytische Formeln für Energieeigenwerte und Eigenfunktionen der stationären Zustände angegeben werden und mit Hilfe bekannter numerischer Methoden quantitativ ausgewertet werden.

Eine Anwendung der Lösungsmethode im Rahmen des α -Teilchenmodells auf das Problem der stationären Zustände des ^{12}C -Kerns ergab bei bestimmter Wahl der Potentialparameter S_1 und S_2 , daß sich im niederenergetischen Energiebereich eine große Zahl von Niveaus mit dem vorliegenden Modell einfach verstehen und quantitativ besser erklären lassen als mit Hilfe anderer Modellrechnungen. Davon ausgenommen sind die Zustände $2^+/4.44$ MeV und $0^+/10.3$ MeV, sowie die Zustände "verkehrter" Parität 1^+ und 2^- . Die Ab-

weichung der Zustände 2^+ und 0^+ von den experimentellen Werten lassen sich auf den sicher nicht sehr realistischen harmonischen Anteil des Modellpotentials zurückführen. (Der Übergang zu mehr kastenförmigen Potentialen, die bei endlichen Teilchenabständen zu konstanten Werten abbiegen, könnte hier möglicherweise zu Verbesserungen führen). Nicht erklärt werden können mit unseren Modellvorstellungen dagegen die tiefliegenden Zustände 1^+ und 2^- , da wir es hier mit inneren Anregungen der α -Teilchen zu tun haben.

An Hand der gleichzeitig ermittelten Wellenfunktionen der Zustände konnten deren Eigenschaften (kettenförmige bzw. gleichseitig-dreieckige Anordnung der α -Teilchen, kollektive Eigenschaften) diskutiert werden.

Insgesamt kann gesagt werden, daß die Berücksichtigung aller Invarianzen des Hamiltonoperators und die Wahl einer echten Zweiteilchenwechselwirkung im Vergleich zu anderen theoretischen Ansätzen quantitative Verbesserungen erbrachte.

Weitere Beispiele für die Anwendung unserer Entwicklungsfunktionen auf Probleme der Physik wären die Berechnung der Grundzustände der Spiegelkerne He^3 und H^3 (Untersuchung mathematischer Ansätze der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, Einfluß der Coulombabstoßung) sowie die Bestimmung stationärer Zustände von dreiatomigen Molekülen (Kratzerscher Potentialansatz). Jedoch kann man in diesen Fällen nicht erwarten, analytische Formeln für Energie und Eigenfunktionen zu finden, sodaß man allein auf numerische Methoden angewiesen ist.

Bei Herrn Professor Dr. H. Volz möchte ich mich für die Überlassung dieses interessanten Themas und für die in vielen Diskussionen gegebenen Anregungen herzlich bedanken.

Der Gedankenaustausch mit Herrn Priv. Doz. H. Ruder hat zur Klärung mancher Probleme beigetragen.

Dem Rechenzentrum der Universität Erlangen-Nürnberg danke ich für die großzügig zur Verfügung gestellte Rechenzeit.

L I T E R A T U R

- | 1 | H.Diel, S.Flügge,U.Schröder,A.Völkel,A.Weiguny
Zeitschrift für Physik
162 , 1 - 14 (1961)

H.Diel,S.Flügge
Zeitschrift für Physik
162 , 21 - 27 (1961)

S.Flügge,U.Schröder
Zeitschrift für Physik
162 , 28 - 33 (1961)

S.Flügge,A.Weiguny
Zeitschrift für Physik
171 ,171 - 177 (1963)

- | 2 | W. Zickendraht
Annals of Physics
35 , 18 - 41 (1965)

- | 3 | H. Ruder
Zeitschrift für Naturforschung
23a ,579 - 596 (1968)

- | 4 | H.Ruder,H.Volz
Zeitschrift für Naturforschung
23a ,1419 -1430 (1968)
24a ,1171 -1188 (1969)

- | 5 | A.J.Dragt
Journal of Mathematical Physics
Vol. 6 , N 4 , 1965

- | 6 | J.M.Levy-Leblond
Journal of Mathematical Physics
Vol. 7 , N 12 , 1966

- J.M.Levy-Leblond, M.Levy-Nahas
Journal of Mathematical Physics
Vol 6 , N 10 , 1965

- | 7 | A.M.Badalyan, F.Calogero, A.Simonov
Nuovo Cimento
Serie X , Vol. 68 A , 572 ~ 590 (1970)
Vol. 67 A , 641 ~ 657 (1970)
Vol. 1 A , 739 ~ 758 (1971)

- | 8 | M.J.Englefield
Nuclear Physics
A 181 (1972) 305 - 318

- | 9 | G.Wunner
Diplomarbeit Erlangen (1973)

- | 10 | E.Peschl
Funktionentheorie I
BI - Hochschultaschenbuch Nr. 131/131a

- | 11 | H.Letz,H.Ruder,H.Volz
Zeitschrift für Naturforschung
25a , 317 - 321 (1970)

- | 12 | H.Ruder
Habilitationsschrift Erlangen 1972

- | 13 | J.C.Y. Cheng
Journal of Mathematical Physics
Vol. 6 , N 11 , 1723 - 1729 , 1965

- | 14 | L.Collatz
Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen
Akademische Verlagsgesellschaft
Leipzig 1963

- | 15 | H.Hutzelmeyer,H.Hackenbroich
Zeitschrift für Physik
232 , 356 (1970)

- | 16 | Gröbner,Hofreiter
Bestimmte Integrale

- | 17 | K.Wilderdmuth,W.McClure
Springer Tracts in Modern Physics
V 41

- | 18 | H.Friedrich, A.Weiguny
Physics Letters
Vol. 35 B , N 2 (1971)

- D.M.Brink,H.Friedrich,A.Weiguny,C.W.Wong
Physics Letters
Vol. 33 B , N 2 (1970)

- | 19 | S.A.Afzal, A.A.Z.Ahmad
International Centre for Theoretical Physics
1968 Trieste

- | 20 | F.Ajzenberg-Selove, T.Lauritzen
Nuclear Physics
A 114 , 1 (1968)

- | 21 | Kohen, Kurath
Nuclear Physics
73 , 1 (1968)

- | 22 | M.A.Fawzi
Zeitschrift für Physik
250 , 120 - 144 (1972)

- | 23 | W. Zickendraht
Zeitschrift für Physik
238 , 342 - 351 (1970)

- Zeitschrift für Physik
251 , 365 - 374 (1972)

- | 24 | N.Takigawa, A.Arima
Nuclear Physics
A 168 (1971) 593

- | 25 | N.De Takacsy
Nuclear Physics
A 178 (1972) 469 - 478

- | 26 | H. Herold
Diplomarbeit Erlangen 1973
unveröffentlicht

L E B E N S L A U F

Horst Wilhelm L E T Z

Geboren am : 3. März 1943

in : F Ü R T H / BAY.

Eltern : Kaufm. Angest. Wilhelm L E T Z ,
Ehefrau Maximiliane L E T Z ,geb.
Förster

Familienstand : ledig

Schulen : 1949-1953 Frauenschule Fürth
1953-1962 Hardenberggymnasium
Fürth

Studium : Physikstudium an der Universität
Erlangen-Nürnberg vom Winterse-
mester 1962/63 bis einschließ-
lich Sommersemester 1969

Prüfungen : Vordiplom im Mai 1965
Hauptdiplom im April 1969

Stellungen : 1.9. 1967 bis 30.4.1968 Studenti-
sche Hilfskraft
1.11.1969 bis 31.8. 1970 Wissen-
schaftliche Hilfskraft
ab 1.9. 1970 Verwalter der Dienst-
geschäfte eines wissenschaftlichen
Assistenten

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nahe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990